А.С. Рылов

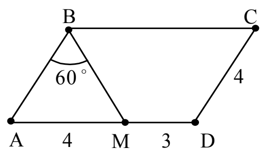
Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 8 класс

к пособию «Дидактические материалы по геометрии для 8 класса общеобразовательных учреждений / В.А. Гусев, А.И. Медяник. — 7-е изд. — М.: Просвещение, 2001.»

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С-1

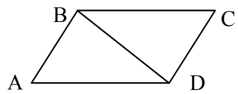


1. Дан параллелограмм ABCD. $M \in AD$, AM = 4, MD = 3, $\angle ABM = 60^\circ$, CD = 4.
Найти его периметр и углы.
Решение. 1) AD = AM + MD = 4 + 3 = 7 = BC, AB = CD = 4 по свойству параллелограмма, $\Rightarrow$ Δ ABM — равнобедренный $\Rightarrow \angle ABM = \angle ABB = 60^\circ$.

$\angle BAM = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

$\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$. $\angle ABC = \angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$;
$P(ABCD) = 2AD + 2AB = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 14 + 8 = 22$.

2. Даны AD = 6 см, AB = 4 см, $\angle BAD = 50^\circ$. Построить параллелограмм ABCD.

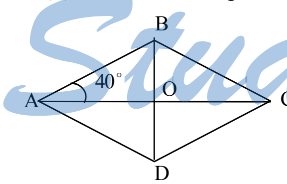


1) Строим угол 50° с вершиной в точке A.
2) Откладываем на одном луче точку D, отстающую от A на 6 см, на другом точку B, так, что AB = 4 см.
3) Через точку D проводим прямую DC || AB.
4) Через точку B проводим BC || AB. 5) $BC \cap CD = C$.
6) Полученный параллелограмм искомый.

С-2

1. *Дано.* ABCD — прямоугольник, P(ABCD) = 48 см, AB:AD=1:2. *Найти* стороны.
Решение. Пусть AB = x см, тогда AD = 2x см.
$P(ABCD) = 2(x + 2x) = 48 \Rightarrow x = 8$. AB = CD = 8 см, AD = BC = 16 см.

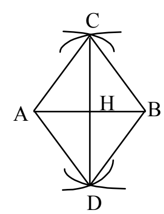
2. *Дано.* ABCD — ромб, AD — диагональ, $\angle BAC = 40^\circ$.



Найти углы ABCD.
Решение.
По свойству ромба $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow$ из ΔAOB, $\angle ABO = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
$\Delta AOB = \Delta COB = \Delta AOD$ по трем сторонам $\Rightarrow \angle BAO = \angle DAO = 40^\circ$, $\angle ABO = \angle CBO = 50^\circ$.

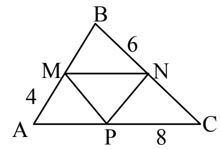
$\angle BAD = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ = \angle BCD$; $\angle ABC = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ = \angle ADC$.

С-3



1. Пусть дан отрезок AB. Проведем две окружности с центром в точке A и B и радиусами равными AB. Окружности пересекаются в двух точках: C и D. ACBD — ромб $\Rightarrow$ его диагонали пересекаются в точке H и делятся точкой H пополам.

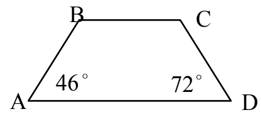
2. *Дано.* ΔABC. $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см. Вершинами ΔMNP являются середины сторон ΔABC.



Найти P(MNP).

Решение. $P(ABC) = 4 + 6 + 8 = 18$ см. Т.к. средние линии треугольника вдвое меньше соответствующих сторон, то $P(MNP) = \frac{1}{2} P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$ см.

С-4



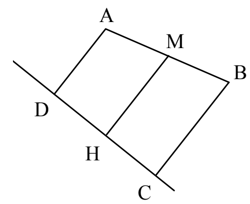
1. *Дано.* ABCD — трапеция. $\angle BAD = 46^\circ$, $\angle ADC = 72^\circ$.

Найти. $\angle ABC$ и $\angle BCD$.

Решение. $\angle ABC$ и $\angle BAD$ — односторонние, следовательно $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$.

Аналогично, $\angle BCD = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

2. Переоформулируем эту задачу в таком виде.



Дано. ABCD — прямоугольная трапеция. AD=6 см, BC = 10 см, M — середина AB, $MH \perp DC$.

Найти. MH.

Решение. MH — средняя линия трапеции.

$$MH = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(6 + 10) = 8 \text{ см.}$$

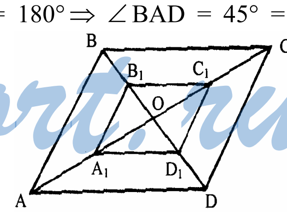
ABCD — трапеция, т.к. AD и BC — перпендикуляры к DC $\Rightarrow AD \parallel CB$.

С-5

1. *Дано.* ABCD — параллелограмм. $\angle ADC = 3\angle BAD$.

Найти. Углы ABCD.

Решение. $\angle ADC + \angle BAD = 180°$; $4 \cdot \angle BAD = 180° \Rightarrow \angle BAD = 45° = \angle BCD$; $\angle ADC = 180° - 45° = 135° = \angle ABC$.

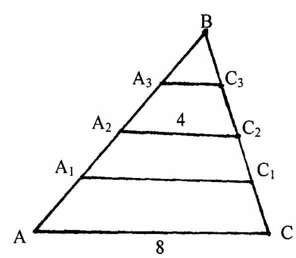


2. *Дано.* ABCD — параллелограмм. $AC \cap BD = O$; $A_1, C_1 \in AC$; $AA_1 = A_1O$, $OC_1 = C_1C$; $B_1, D_1 \in BD$, $BB_1 = B_1O$, $DD_1 = D_1O$.

Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

По свойству параллелограмма ABCD, $AO = OC$, $BO = OD \Rightarrow AA_1 = A_1O = OC_1 = C_1C$ и $B_1O = OD_1$.

В четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ он параллелограмм (по признаку параллелограмма).

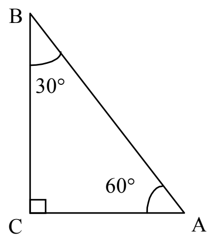


3. *Дано.* ΔABC. $C_1, C_2, C_3 \in BC$; $BC_3 = C_3C_2 = C_2C_1 = C_1C$; $A_1, A_2, A_3 \in AB$; $A_1C_1 \parallel A_2C_2 \parallel A_3C_3 \parallel AC$; $AC = 8$ см.

Найти. A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3.

Решение. A_2C_2 — средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow A_2C_2 = 4$ см; A_3C_3 — средняя линия $\Delta A_2BC_2 \Rightarrow A_3C_3 = 2$ см; ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ подобны, и стороны AC и AC_1 относятся как 4:3, следовательно $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{3}{4}$, $A_1C_1 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ см.

С-6



1. *Дано.* ΔABC, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$.

Найти. $\frac{AC}{AB}$.

Решение. $\angle ABC = 90^\circ - \angle A = 30^\circ$.

В прямоугольном ΔABC, AC лежит против $\angle B = 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

2. *Решение.* отношение $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{1}{2}$ не изменится.

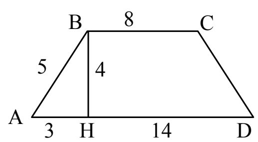
С-7

1. *Дано.* ABCD — прямоугольник, AB = 15 см, AD = 8 см.

Найти диагональ.

Решение. По теореме Пифагора

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$см.



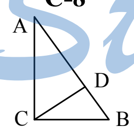
2. *Дано*. ABCD — равнобокая трапеция, AD=14 см, BC=8 см, AB=5 см. BH — высота.

Найти. BH.

Решение. $AH = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(14 - 8) = 3$ см;

$BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ см.

С-8



1. *Дано.* ΔABC, $\angle C = 90^\circ$, CD — высота, BD>AD.

Найти какой катет больше.

Решение. Т.к. BD и AD — проекции CB и AC (соответственно) на гипотенузу AB, то CB>AC.

2. *Решение.* не может из неравенства треугольника 3>1 + 1,5 = 2,5.

С-9

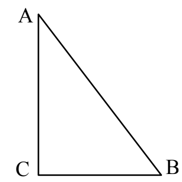
1. $\sin 65^\circ = 0{,}9063$; $\cos 65^\circ = 0{,}4226$; $\operatorname{tg} 65^\circ = 2{,}145$;

$\sin 65^\circ 12' = 0{,}9078$; $\cos 65^\circ 12' = 0{,}4195$; $\operatorname{tg} 65^\circ 12' = 2{,}164$;

$\sin 65^\circ 15' = 0{,}9082$; $\cos 65^\circ 15' = 0{,}4187$.

2. а) $\alpha = 20^\circ 30'$; б) $\alpha = 54^\circ 12'$; в) $\alpha = 45^\circ$.

С-10



1. *Дано.* Δ ABC, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, AB = 1 см.
Найти катеты.

Решение. CB = $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ см (как катет лежащий против угла в 30°). AC = AB $\cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

2. *Дано.* Δ ABC, $\angle C = 90^\circ$, AC = BC, AB = 3 см.
Найти катеты.

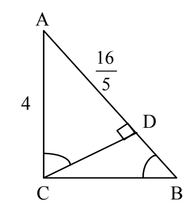
Решение. CB = AC = AB $\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

С-11

1. *Решение.* Пусть стороны равны a и b, а диагональ d.
Тогда a = $\sqrt{a^2} < d = \sqrt{a^2+b^2} > \sqrt{b^2} = b$.

2. *Дано.* Δ ABC, $\angle C = 90^\circ$, CD — высота. AD = $\frac{16}{5}$ см, AC = 4 см.

Найти. AB, CB.



Δ ACD и Δ ABC подобны по трем углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow$ AB $= \frac{AC \cdot AC}{AD} = \frac{16}{\frac{16}{5}} = 5$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ CB = $\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25-16} = 3$ см.

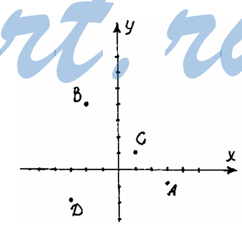
3. *Дано.* Δ ABC, AB = c = 13, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = \alpha = 35^\circ$.
Найти катеты и $\angle$ A.

Решение. $\angle A = 90^\circ - \alpha = 55^\circ = \beta$;

a = AB $\cdot \sin\alpha = 13 \cdot \sin 35^\circ = 7{,}46$; b = AB $\cdot \sin\beta = 13 \cdot \sin 65^\circ = 10{,}65$.

С-12

1. См рисунок.



2. $(x,y) = \left(\frac{3-2}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

С-13

1. $d = \sqrt{(3-2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{26}$.

2. Т.к. уравнение оси Oy: $x = 0$, то уравнение $(x-4)^2 + y^2 = 25$ приобретает вид $16 + y^2 = 25$; $y = \pm\ 3$ точки пересечения (0, 3) и (0, –3).

С-14

1. Уравнение прямой, параллельной оси y имеет вид x = const $\Rightarrow$ искомая прямая задается уравнением $x = -1$.

2. Т.к. расстояние берется по перпендикуляру к прямой и радиус окружности $\sqrt{36}$ = 6, то прямая касается окружности.

С-15

1. sin 145$^\circ \approx 0{,}5736$, cos 145$^\circ \approx -$ 0,8192; tg 145$^\circ \approx -$ 0,7002; sin 99°40$'$ $\approx$ 0,9858; cos 99°40$'$ $\approx -$ 0,1670; tg 99°40$'$ $\approx -$ 5,871.

2. $\cos\alpha = -0{,}6 = -\sqrt{1-0{,}64} = -\sqrt{0{,}36}$.

С-16

1. *Дано.* A(2;–1), B(–1;3), C(–3;1); Δ ABC, AD — медиана.
Найти AD и уравнение AD.

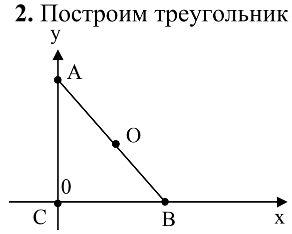
Решение. Точка D имеет координаты (–2;2) = $\left(\dfrac{-1-3}{2},\dfrac{3+1}{2}\right)$;

AD=$\sqrt{(2+2)^2+(1+2)^2} = \sqrt{25} = 5$; AD(–4;3).

Коэффициент наклона прямой равен $-\dfrac{3}{4} \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + c$;

$D \in AD \Rightarrow 2 = -\dfrac{3}{4}(-2) + c$; $c = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$; 3x + 4y – 2 = 0.

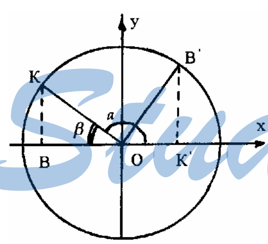
2. Построим треугольник с вершинами в этих точках.



$\angle C = 90^\circ \Rightarrow$ центр описанной окружности O лежит на середине гипотенузы AB.

$O\left(\dfrac{6+0}{2};\dfrac{0+8}{2}\right)$ = O(3,4).

CO = OA = OB=R=$\sqrt{3^2+4^2} = 5 \Rightarrow$ уравне-ние окружности: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

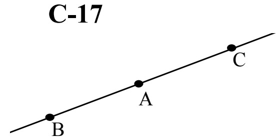


3. *Дано.* α, β — смежные углы.

Доказать. sin α = sin β.

Доказательство. Построим единичную окружность с центром O в вершине угла.
Луч OK пересекает окружность в точке K. Т.к. синус угла проекция OK на ось O*y*, то sin α = sin β.

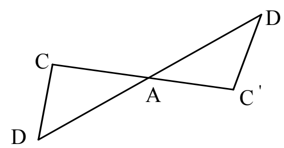
С-17



1. Даны точки A и B. Построить точку C симметричную B относительно A.
Построение. Проведем прямую BA и от точки A на прямой отложим отрезок AC = AB, так чтобы точки B и C не совпадали. Точка C — искомая.

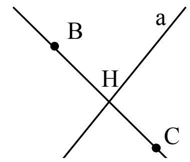
2. Дан отрезок CD, точка A, A прямой CD. Построить фигуру симметричную CD относительно A.

Построение. Строим точки C′ и D′ симметричные точкам C и D относительно A соответственно. Строим отрезок C′D′. Отрезок C′D′ — искомый.



С-18

1. *Дано.* Прямая *a* и точка B.
Построить точку C симметричную относительно точке B.
Построение. Строим прямую BH содержащую перпендикуляр BH к прямой a. От точки H откладываем отрезок HC=BH, так чтобы B и C лежали по разные стороны от *a*. Точка C — искомая.



2. Луч имеет одну ось симметрии — прямую, содержащую этот луч.

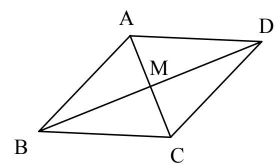
С-19

1. $x' = 1 + 2 = 3$, $y' = 1 - 2 = -1$. Точка (1,1) перейдет в точку (3,–1).
$x' = -1 + 2 = 1$, $y' = 1 - 2 = -1$. Точка (–1,1) перейдет в точку (1,–1).

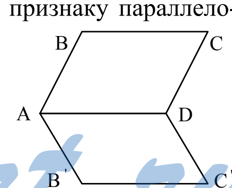
2. Из условий составим систему: $\begin{cases} 1 = 0 + a \\ 2 = 1 + b \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

С-20

1. *Дано.* Δ ABC, M — середина AC, D — симметрична B относительно M.
Доказать. ABCD — параллелограмм.
Доказательство. Т.к. B и D симметричны относительно M, то BM = MD. AM = MC, т.к. M — середина AC $\Rightarrow$ в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ ABCD — параллелограмм (по признаку параллелограмма).



2. *Дано.* ABCD — параллелограмм.
Построить фигуру симметричную ABCD относительно AD.
Построение: Строим точки B′ и C′ симметричные B и C относительно прямой AD. Соединяем точки D и C′, C′ и B′, B′ и A отрезками. AB′C′D — искомая фигура.



3. Если параллельный перенос существует, то система имеет решения:
$\begin{cases} 1 = 3 + a \\ 3 = 1 + b \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = 2 + a \\ 2 = 0 + b \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ параллельный перенос существует.

С-21

1. Дан вектор $\vec{AB}$, точка C. Отложить от точки C вектор равный $\vec{AB}$.

Построение. Проведем прямую CM $\parallel$ $\vec{AB}$. От точки C на прямой отложим отрезок CD равный $|\vec{AB}|$. Направление вектора выберем таким образом, чтобы полученный вектор и $\overrightarrow{AB}$ были сонаправленны. Полученный вектор искомый.

2. *Дано.* $\vec{a}\,(1, 0)$, $\vec{b}\,(1, 2)$.
Найти. $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.

Решение. $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 1, 0 + 2) = (2, 2)$;
$\vec{a} - \vec{b} = (1 - 1, 0 - 2) = (0, -2)$.

3. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

С-22

1. $\vec{a} = \left(1, \dfrac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{3a} = (3,4)$; $|\overrightarrow{3a}| = \sqrt{9+16} = 5$.

2. $2\vec{c} + 3\vec{a} = (-2 + 3, 0 + 6) = (1,6)$. **3.** $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}$.

С-23

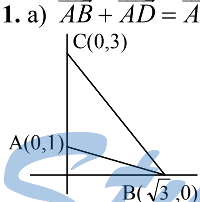
1. $|\vec{c}| = \sqrt{2}$, $|\vec{d}| = \sqrt{4 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$;

$(\overrightarrow{cd}) = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$, $\cos \widehat{\vec{d}\ \vec{c}} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{17}}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$.

2. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикуляры, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow -2 \cdot 2 + 3 \cdot n = 0$, $n = \dfrac{4}{3}$.

С-24

1. а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$.



2. $\overrightarrow{AC}\,(0,2)$, $\overrightarrow{AB}(\sqrt{3}, -1)$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3+1} = 2$;

$|\overrightarrow{AC}| = 2$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 - 2$.

$\cos A = \dfrac{0-2}{2 \cdot 2} = -\dfrac{1}{2}$; $\angle A = 120^\circ$.

Вариант 2

С-1

1. *Дано.* ABCD — параллелограмм; $\dfrac{\angle A}{\angle B} = \dfrac{2}{3}$.

Найти углы ABCD.

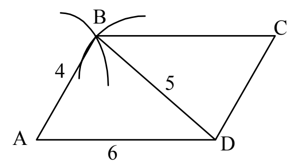
Решение. Т.к. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle B + \dfrac{2}{3}\angle B = 180^\circ$, $\dfrac{5}{3}\angle B = 180^\circ$,

$\angle B = \angle D = 108^\circ$, $\angle A = \angle C = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

2. Построим отрезок AD = 6 см.

Проведем окружность с центром в точке A и радиуса 4. Построим еще одну окружность с центром в точке D и радиуса 5. Окружности пересекутся в точке B. Проведем через B прямую BC || AD. Проведем через D прямую DC || AB. BC∩DC = C.

Параллелограмм ABCD — искомый.



C-2

1. *Дано.* Δ BCD — прямоугольник, AB:BC = 1:3, P(ABCD) = 96 см.

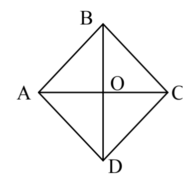
Найти стороны ABCD.

Решение. BC = 3AB, P(ABCD) = 2(AB + BC) = 2(AB + 3AB) = 96; AB = 12 = CD; BC = AD = 36 см.

2. *Дано.* ABCD — ромб, AC ⋂ BD = O; $\angle$ABD = $\angle$BAC + 20°.

Найти углы ромба.

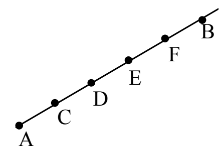
Решение. Т.к. диагонали ромба перпендикулярны, то ΔABO — прямоугольный $\Rightarrow$ $\angle$ABD + $\angle$BAC = 90° $\Rightarrow$ $\angle$BAC=35°, $\angle$ABD = 55°; $\angle$BAD = $\angle$BCD = = 2$\angle$BAC = 70°; $\angle$ABC = $\angle$ADC = 2$\angle$ABD = 110°.



C-3

1. *Дано* отрезок AB. Разделить его на 5 равных частей.

Построение. Измерим длину AB. Разделим это число на 5. От точки A по направления к точке B отложим последовательно четыре отрезка длины, равной полученному числу. Построение закончено.



2. *Дано.* ΔABC P(ABC) = 6,7 см; C_1, B_1 — средняя линия.

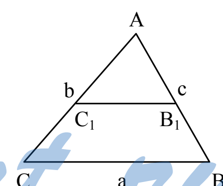
Найти $P(AB_1C_1)$.

Решение. Т.к. C_1B_1 — средняя линия, то

$$AC_1 = \frac{1}{2}AC,\ AB_1 = \frac{1}{2}AB,\ C_1B_1 = \frac{1}{2}CB \Rightarrow P(AB_1C_1) = $$

$$= AB_1 + C_1B_1 + AC_1 = \frac{1}{2}(AB + CB + AC) = $$

$$= \frac{1}{2}P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 6{,}7 = 3{,}35 \text{ см.}$$



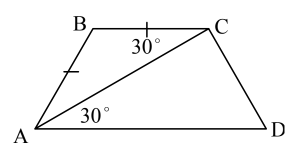
C-4

1. *Дано.* ABCD — равнобокая трапеция. $\angle$CAD = 30°, BC = AB.

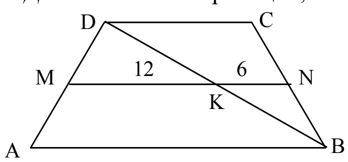
Найти углы трапеции.

Решение. ∠BCA = ∠CAD = 30° как накрест лежащие (при пересечении BC||AD секущей AC).

Т.к. AB = BC, то ΔABC — равнобедренный, ⇒ ∠ACB = ∠BAC = 30° ⇒ ∠BAD = ∠CDA =

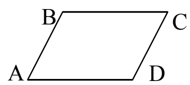


$= \angle BAC + \angle CAD = 30° + 30° = 60°$.
$\angle ABC = \angle BCD = 180° - 60° = 120°$.
2. *Дано.* ABCD — трапеция, AB || CD, MN — средняя линия,

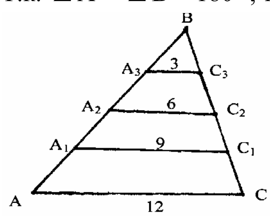


$BD \cap MN = K$; $MK = 12$ см, $KN = 6$ см.
Найти. AB и DC.
Решение. В ΔDCB KN — средняя линия
$\Rightarrow$ $DC = 2KN = 12$ см.
Аналогично, в ΔADB $AB = 2MK = 24$ см.

С-5

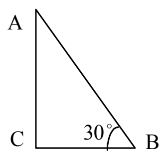


1. *Дано.* ABCD — параллелограмм, $\angle B = 2\angle A$.
Найти углы ABCD.
Решение.
Т.к. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle A + 2\angle A = 180^\circ$, $\angle A = 60^\circ = \angle C$,



$\angle B = 2\angle A = 120^\circ = \angle D$.
2. Смотри Вариант 1 С-5 (2).
3. Аналогично задаче С-5 (3) Вариант 1.
$A_3C_3 = 3$ см,
$A_2C_2 = 6$ см,
$A_1C_1 = 9$ см,
$AC = 12$ см.

С-6



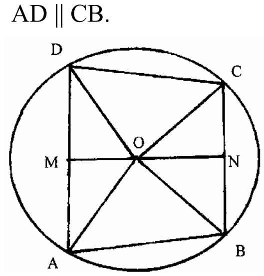
1. В построенном мной треугольнике ABC, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

2. В любом подобном $\Delta A_1B_1C_1$, $\dfrac{A_1C_1}{A_1B_1} = \dfrac{1}{2} = \sin B$.

С-7

1. *Дано.* ABCD — прямоугольник, $AB = 9$ см, $AC = 15$ см.
Найти. P(ABCD).
Решение. $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$ см $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $P(ABCD) = 2(AB + BC) = 2(9 + 12) = 42$ см.

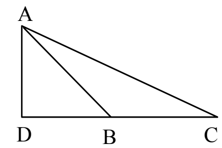
2. *Дано.* (O,R) — окружность, $R = 25$ см, $AD = 40$ см, $BC = 30$ см — хорды, AD || CB.



Найти расстояние между хордами.
Решение. ABCD — равнобокая трапеция. Причем O лежит внутри ABCD. Проведем ось симметрии MN трапеции.
$MA = \dfrac{1}{2}AD = 20$ см, $BN = \dfrac{1}{2}CB = 15$ см.
Из прямоугольных ΔAMO и ΔBNO:
$MO = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ см;

NO = $\sqrt{R^2 - NB^2} = \sqrt{25^2 - 15^2}$ = 20 см.
MN — высота трапеции и расстояние между хордами, значит,
MN = MO + ON = 35 см.

С-8



1. *Дано.* Δ ABC, $\angle$ B — тупой, AD — высота.
Какая сторона больше AB или AC?
Решение. Δ ADB и Δ ADC — прямоугольные;
AB= $\sqrt{AD^2 + DB^2} < \sqrt{AD^2 + (DB + BC)^2}$ = AC.

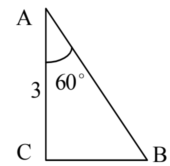
2. Не может из неравенства треугольника: 1>0,4 + 0,5

С-9

1. sin 44°42′ = 0,7034, cos44°42′ = 0,7108; tg 44°42′ = 0,9896;
sin 44°40′ = 0,7030, cos 44°40′ = 0,7112; tg 44°70′ = 0,9885.

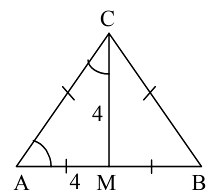
2. а) α = arcsin 0,5035 = 30°14′; б) α = arccos 0,8208 = 34°50′;
в) α = arctg 0,5774 $\approx$ 30°.

С-10



1. *Дано.* Δ ABC, $\angle$ C=90°; AC = 3 см, $\angle$ A = 60°.
Найти. AB, BC.
Решение. $\angle$ B = 90° – $\angle$ A = 30° $\Rightarrow$ AB = 2AC = 6 см.
CB = $\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ см.

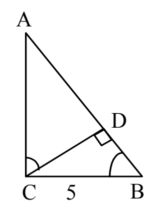
2. *Дано.* Δ ABC — прямоугольный, CM — медиана, AC=CB, CM= 4 см.
Найти. AB, BC, AC.



Решение. $\angle$ C = 90°, CM — высота и биссектриса $\Rightarrow$ Δ ACM = Δ BCM — равнобедренные прямоугольные $\Rightarrow$ AM = CM = MB = 4 см;
AB = AM + MB = 8 см;
AC = CB = $\sqrt{AM^2 + MC^2} = 4\sqrt{2}$ см.

С-11

1. *Дано.* Δ ABC — равносторонний, CM — медиана.
Доказать. CM<AC. Доказательство: CM — высота, Δ ACM — прямоугольный. В нем CM = $\sqrt{AM^2 + AC^2} < \sqrt{AC^2}$ = AC.



2. *Дано.* Δ ABC, $\angle$ C = 90°; CD — высота,
BD = $\frac{25}{13}$ см, BC = 5 см. *Найти.* AC и AB
Решение. Δ ACB~Δ ADC~Δ CDB по двум углам $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$; AB = $\frac{CB^2}{DB} = \frac{25}{\frac{25}{13}}$ = 13 см;

AC= $\sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}$ = 12 см;

3. *Дано* Δ ABC, $\angle$C = 90°. CB = a = 14 см, $\angle\alpha = \angle$A = 42°.
Найти. AB, AC, $\angle$B.

Решение. AB = CB $\cdot$ sin α = 14 $\cdot$ sin 42° $\approx$ 20,92 см;

AC = CB $\cdot$ tg α = 14 $\cdot$ tg 42° $\approx$ 15,55 см; $\angle$B = 90° – α = 48°.

С-12

1. Расстояние от A до Ox равно R = |–2| = 2.

2. Центр окружности — середина отрезка $O\left(\frac{-1+5}{2};\frac{1+(-5)}{2}\right)$ = O (2, –2).

С-13

1. Абсцисса центра окружности равна абсциссе точки касания и равна –1. То есть O(–1, 4). Радиус окружности — расстояние между прямыми, равен 4. Получаем уравнение окружности: $(x + 1)^2 + (y – 4)^2 = 16$.
2. Координаты точки пересечения прямых удовлетворяют уравнениям обеих прямых, т.е.

$$\begin{cases}4x_0-2y_0=3\\3x_0-2y_0=9\end{cases};\ \begin{cases}7x_0=12\\y_0=\dfrac{4x_0-3}{2}\end{cases};\ \begin{cases}x_0=\dfrac{12}{7}\\y_0=\dfrac{24}{7}-\dfrac{3}{2}\end{cases};\ \begin{cases}x_0=1\dfrac{5}{7}\\y_0=\dfrac{27}{14}\end{cases};\ \begin{cases}x_0=1\dfrac{5}{7}\\y_0=1\dfrac{13}{14}\end{cases}.$$

С-14

1. Прямая параллельная Ox имеет вид y = const. В нашем случае y = –3.
2. Расстояние от центра окружности до OX и ее радиус равны 1. А расстояние до Oy равно 2>1. Значит, окружность не пересекает Oy.

С-15

1. sin 133° ≈ 0,7314, cos 133° ≈ – 0,6820; tg 133° ≈ –1,0724;
sin 105°10′ ≈ 0,9652, cos 105°10′ ≈ –0,2616; tg 105°10′ ≈ 3,689.

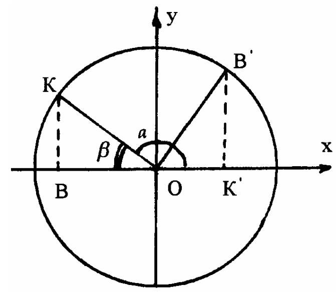
2. $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\frac{209}{289}-\frac{64}{289}}=\frac{15}{17}$.

С-16

1. *Дано.* Δ ABC, A(–6, 4), B(1, 2), C(4, 0); BD — медиана.
Найти длину BD и уравнение прямой BD.
Решение. D — середина AC, D(–1, 2), BD = 2.

Коэффициент наклона BD равен $\frac{2-2}{1+2}$ = 0 $\Rightarrow$ уравнение прямой BD имеет вид y = Ox + C, 2 = 0 $\cdot$ 1 + C; C = 2, y = 2.
2. Точка D пересечения диагоналей — центр описанной окружности. Ее координаты $\left(\frac{24}{2},\frac{10}{2}\right)$=(12,5), а радиус AD=$\sqrt{12^2+5^2}$=13 $\Rightarrow$ уравнение окружности имеет вид: $(x – 12)^2 + (y – 5)^2 = 169$.

3. Пусть α, β — смежные углы.

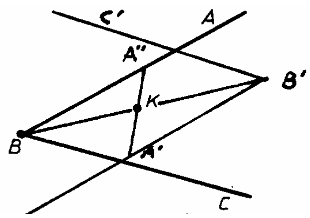


Луч КО пересекает единичную окружность в точке К. Т.к. косинус угла α — проекция ОК на ось Оx, то, если повернуть стороны угла β а угол α, ОВ′ станет симметрично ОК и будет лежать в противоположной относительно Оy полуплоскости. Но из равенства Δ ОКВ = Δ ОВ′К′ $\Rightarrow$ что абсолютные значения косинусов смежных углов равны, но значения косинусов противоположны по знаку.

С-17

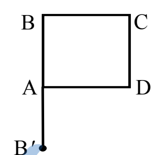
1. Дан Δ АВС. Построить точки А′ и В′ симметричные точкам А и В относительно С.
Построение. На прямой АС от точки С отложим отрезок СА′, такой, что АС = СА′. На прямой ВС отложим от точки С отрезок СВ′ равный СВ. Точки А′ и В′ — искомые.

2. Дан $\angle$ АВС, точка К.
Построить $\angle$ А′В′С′.
Построение. Выберем на сторона угла точки А" и В" отличные от В. Построим точки В′, А′ и С′ симметричные относительно К точкам В, А", С". Проведем лучи В′А′ и В′С′. Угол А′В′С′ — искомый.



С-18

1. Дан квадрат ABCD. Построить точку В′ симметричную В относительно AD.
Построение. Прямая АВ $\perp$ AD, отложим от точки А отрезок АВ′ = АВ на прямой АВ. Точка В′ — искомая.



2. Квадрат имеет четыре оси симметрии: две средние линии и обе диагонали.

С-19

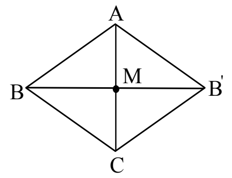
1. Точка (0, 2) перейдет в точку (0 – 2, 2 + 1) = (–2, 3), а точка (1, –3) в (1 – 2, –3 + 1) = (–1, –2).

2. При наших условиях можно составить систему:

$$\begin{cases} 0 = -2 + x_0 \\ 2 = 0 + y_0 \\ 2 = 0 + x_0 \\ 0 = y_0 + (-1) \end{cases}; \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \\ x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$ система противоречива.

Значит, такого параллельного переноса не существует.

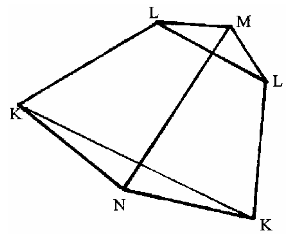
С-20



1. *Дано* Δ ABC — равносторонний, M — середина AC, B′ симметрично B относительно M.

Доказать. AB′ CB — ромб.

Доказательство. Т.к. Δ ABC — равносторонний, то BM $\perp$ AC $\Rightarrow$ BB′ $\perp$ AC и BM = MB′. Видим, что в четырехугольнике диагонали перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ AB′ CB — ромб.



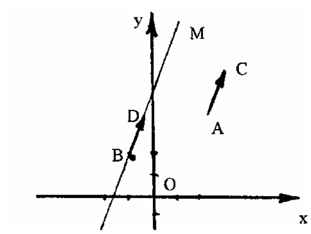
2. *Дано* четырехугольник KLMN. Построить симметричную данной фигуру относительно MN.

Построение. Построим точки L′ и K′ симметричные L′ и K′ относительно MN. Точки M и N останутся неподвижными. Четырехугольник K′L′MN — искомый.

3. Поставив координаты точек в формулы движения получим:

$$\begin{cases} 5 = 7 + a \\ -7 = -5 + b \end{cases}; \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}.$$

С-21

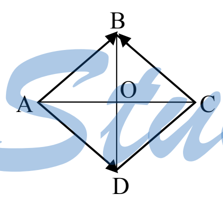


1. Дан вектор $\overrightarrow{AC}$, точка D(–1, 2). Отложить $\overrightarrow{AC}$ от B.

Построение. Проведем прямую

BM ∥ $\overrightarrow{AC}$. Отложим на BM отрезок BD = AC.

Нарисуем стрелку на BD так, чтобы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$ были сонаправлены.



2. $\vec{a} - \vec{b}$ = (1 – 1;0 – 2) = (0, –2);

$\vec{b} + \vec{c}$ = (1 + 1, 2 + 3) = (2, 5).

3. $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

С-22

1. $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Координаты сонаправленного единичного вектора $\vec{e}\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$.

2. $2\vec{c} - 3\vec{a}$ = (2 – 3 · 0;2 + 3) = (2,5).

3. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DO} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}{2}$.

С-23

1. $\left(\vec{m},\vec{n}\right) = -2 + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$; $\left|\vec{m}\right| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$; $\left|\vec{n}\right| = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$;

$\cos\alpha = \dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{13}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{65}}$; $\alpha \approx 97^\circ 08'$.

2. $\vec{a} + \lambda\vec{b} \perp \vec{a} \rightarrow \left(\vec{a}+\lambda\vec{b},\vec{a}\right) = 0$; $(1-3\lambda)\cdot 1 + (4+2\lambda)4 = 0$;

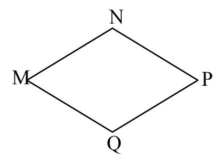
$1 - 3\lambda + 16 + 8\lambda = 0$; $\lambda = -\dfrac{17}{5}$.

С-24

а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}$;

б) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$;

в) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{MN}$.



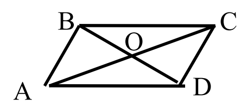
Вариант 3

С-1

1. *Дано*. ABCD — параллелограмм, AB=BC+25, P(ABCD)=122 см. *Найти* стороны ABCD.

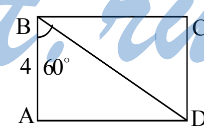
Решение. P(ABCD) = 2(AB + BC) = 2(2BC + 25) = 122 см.
2BC = 61 – 25; BC = AD = 18 см; AB = DC = 43 см;

2. Построим острый угол O — 60°. Продолжим оба луча до прямых. На одной из них отложим от точки O отрезки AO и OC равные $\dfrac{12}{2} = 6$ см. На другой прямой отложим от точки O отрезки BO и DO равные 4 см. Соединим точки A, B, C и D отрезками. Параллелограмм ABCD — искомый.

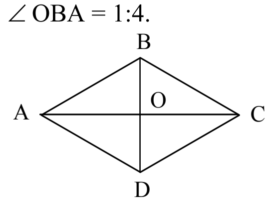


С-2

1. *Дано*. ABCD, прямоугольник AD=4 см, $\angle$ABD=60°.
Найти. BD.
Решение. Из прямоугольного ΔABD,
BD = AB/cos(ABD) = $4/\dfrac{1}{2} = 4\cdot 2 = 8$ см.



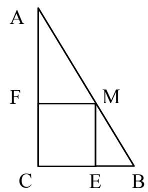
2. *Дано*. ABCD — ромб; AC $\cap$ BD = O; $\angle$OAB: $\angle$OBA = 1:4.
Найти углы ромба.
Решение. $\angle$OAB + $\angle$OBA = 90°;
5$\angle$OAB = 90°, $\angle$OAB = 18°, $\angle$OBA = 72°,
$\angle$DAB = $\angle$BCD = 2$\angle$OAB = 36°,
$\angle$ABC = $\angle$ADC = 144°.



С-3

1. *Дано* отрезок АВ. Разделить его на 6 равных частей.

Построение. Измерим длину АВ. Разделим это число на 6. От точки А по направлению к точке В отложим последовательно 5 отрезков длины, равный полученному числу. Построение закончено.



2. *Дано* Δ ABC, $\angle C = 90^\circ$, BC = 8 см; M $\in$ AB, AM = MB, AC = 10 см; ME и FM параллельны AC и BC.

Найти. P(CFME).

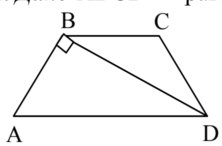
Решение. ME и FM — средние линии Δ ABC,

$FC = ME = \frac{1}{2}AC = 5$ см;

FM = CE = 4 см, P(CFME)5 + 5 + 4 + 4 = 18 см.

С-4

1. *Дано* ABCD — равнобокая трапеция, $\angle ABD=90^\circ$, $\angle ADB=15^\circ$.



Найти углы ABCD.

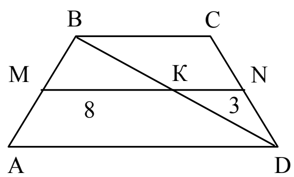
Решение.

$\angle A=90^\circ-\angle ADB=90^\circ-15^\circ=75^\circ=\angle D$

(Из прямоугольного Δ ABD).

$\angle ABC = \angle DCB = 180^\circ - \angle A=180^\circ-75^\circ = 105^\circ$

2. *Дано.* ABCD — трапеция, MN — средняя линия. BD $\cap$ MN = K, MN = 22 см; KN:KM = 3:8.



Найти. AD и BC.

Решение. KN + KM = MN,

$KN+\frac{8KN}{3}=22$ см, KN=6 см $\Rightarrow$ MK = 16 см.

В Δ ABD, Δ BDC, MK и NK — средние линии $\Rightarrow$ AD = 2MK = 32 см, BC = 2 см, KN = 12 см.

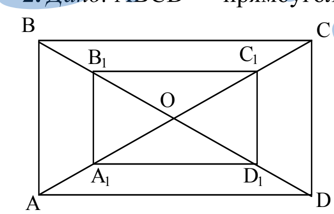
С-5

1. *Дано* ABCD — параллелограмм, $\angle A + \angle C = 90^\circ$.

Найти углы ABCD.

Решение. $\angle A=\angle C = 90^\circ:2 = 45^\circ$; $\angle B = \angle D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$;

2. *Дано.* ABCD — прямоугольник, AC $\cap$ BD = O;



$B_1, D_1 \in BD$, $A_1, C_1 \in AC$;

$BB_1 = B_1O = OD_1 = D_1D$;

$AA_1 = A_1O = OC_1 = C_1C$.

Доказать. $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник.

Доказательство.

Аналогично задаче С-5 (2) Вариант 1. $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм. Докажем, что $\angle B_1A_1D_1 = 90^\circ$, $B_1A_1 \parallel AB$, $A_1D_1 \parallel AD$ как средние линии Δ AOB и AOD $\Rightarrow$ $\angle B_1A_1D_1 = \angle BAD = 90^\circ$как углы между параллельными прямыми $\Rightarrow$ $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник.

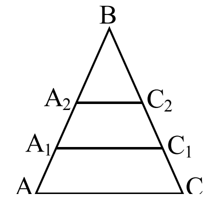
3. *Дан* Δ ABC, AC = 6 см;

A_1, $A_2 \in$ AB, $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$; $A_1C_1 \parallel A_2C_2 \parallel$ AC.

Найти. A_1C_1, A_1C_2.

Решение. $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1 \sim \Delta A_2BC_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$



$A_1C_1 = \dfrac{2}{3}$ AC = 4 см. Аналогично A_2C_2 = 2 см.

С-6

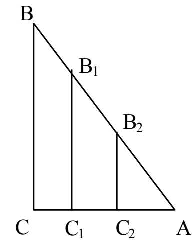
1. Смотри С-6 Вариант 2.

2. *Дано.* Δ ABC, $\angle C = 90^\circ$,

B_1, $B_2 \in$ AB, $BB_1 = B_1B_2 = B_2A$,

$C_1, C_2 \in$ CA, $B_1C_1 \perp$ AC, $B_2C_2 \perp$ AC.

Найти. $\dfrac{AC_1}{AB_1}$, $\dfrac{AC_2}{AB_2}$.



Решение. $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1 \sim$ □ $AB_2C_2 \Rightarrow \dfrac{AC_1}{AB_1} = \dfrac{AC_2}{AB_2} = \dfrac{AC}{AB}$.

С-7

1. *Дано* Δ ABC, AB = BC, BH — высота, AC = 30 см, BH = 20 см.

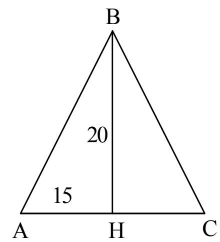
Найти. AB.

Решение. BH — медиана и биссектриса $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ AH = HC = $\dfrac{AC}{2}$ = 15 см.

Δ ABH — прямоугольный,

AB = $\sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{400 + 225}$ = 25 см.



2. *Дано.* (O,R) — окружность;

AB || CD — хорды, R = 25 см;

AB = 40 см, CD = 30 см.

Найти расстояние между AB и CD.

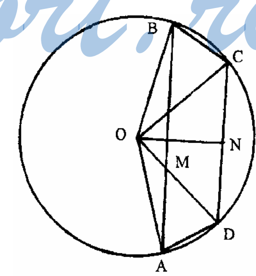
Решение.

Проведем ось симметрии MN для трапеции ABCD. MN $\perp$ AB и CD.

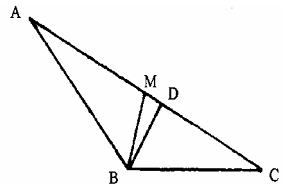
В прямоугольных Δ BMO и Δ CNO BM = $= \dfrac{1}{2}$ AB = 20 см, CN = $\dfrac{1}{2}$ CP = 15 см,

OB=OC=R=25 см $\Rightarrow$ OM = $\sqrt{BO^2 - BM^2}$ =15см,

ON= $\sqrt{OC^2 - CN^2}$ =20 см. Высота трапеции и расстояние между хордами MN = ON – OM = 20 – 15 = 5 см.



С-8



1. Δ ABC, $\angle$ B>90^0, BM — медиана, AB>BC, BD — высота.
Какому из отрезков AM или MC принадлежит точка D.
Решение.
Т.к. AD и DC — проекции сторон AB и BC на AC, то AD>DC, т.к. AB>BC, значит, D $\in$ MC.

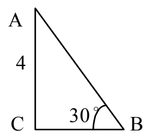
2. Не может из неравенства треугольника: 3>1 + 1,2.

С-9

1. $\sin 56°18' \approx 0{,}8320$; $\cos 56°18' \approx 0{,}5548$; $\mathrm{tg}\, 56°18' \approx 1{,}4994$;
$\sin 56°22' \approx 0{,}8326$; $\cos 56°22' \approx 0{,}5539$; $\mathrm{tg}\, 56°22' = 1{,}5032$;
$\sin 25°47' \approx 0{,}4349$; $\cos 25°47' \approx 0{,}9004$; $\mathrm{tg}\, 25°47' \approx 0{,}4830$.

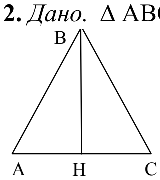
2. а) $\alpha \approx \arcsin 0{,}9222 \approx 67°15'$; б) $\alpha \approx \arccos 0{,}1828 \approx 79°28'$;
в) $\alpha = \mathrm{acrtg} 1 = 45°$.

С-10



1. *Дано.* Δ ABC, AC = 4 см, $\angle$ C = 90°, $\angle\beta$ = 30°.
Найти. AB, BC.
Решение. AB = 2AC = 8 см;
$CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{64-16} = 4\sqrt{3}$ см.

2. *Дано.* Δ ABC, $\angle$ B=90°, AB=BC, BH—биссектриса, BH=3 см.

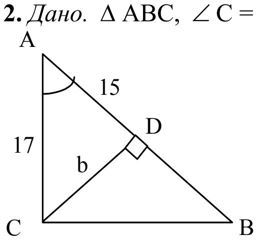


Найти. AB, AC.
Решение. BH — высота и медиана, $\angle$ A = $\angle$ C = 45°,
$\angle$ ABH = $\angle$ CBH = 45° $\Rightarrow$ Δ ABH= Δ CBH — равнобедренные прямоугольные.
AH=HC=BH=3 см, AC=6 см;
$AB=\sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ см.

С-11

1. Пусть стороны параллелограмма a, b, а диагонали d_1, d_2.
Из Δ AOB, $a<\frac{1}{2}(d_1+d_2)$. Из Δ BOC, $b<\frac{1}{2}(d_2+d_1)$.
$a + b<(d_1 + d_2) \Rightarrow$ P(ABCD) = $2(a + b)<2(d_1 + d_2)$.

2. *Дано.* Δ ABC, $\angle$ C = 90°, CD — высота, CD = 8 см, AD = 15 см.



Найти. AB, BC, AC.
Решение. Из прямоугольного Δ ADC,
$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{225+64} = 17$ см.
Δ ADC~ Δ ACB по двум углам $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = \frac{AC^2}{AD} = \frac{289}{15}$ см;

$\frac{CD}{CB} = \frac{AC}{AB}$, CB = $\frac{AB \cdot CD}{AC} = \frac{289 \cdot 8}{15 \cdot 17} = \frac{136}{15}$ см.

3. b = $\sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{324 - 16} = \sqrt{308} = 2\sqrt{77}$ см; $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{9}$;

$\alpha = \arcsin\frac{2}{9} \approx 12\ 50'$; $\beta = 90 - \alpha \approx 77\ 10'$.

С-12

1. Расстояние равно $|x_0| = |-2| = 2$.

2. Пусть $\vec{a}$ вектор соединяющий один конец диаметра с центом окружности $\vec{a}$ (2-5, 0 + 2), $\vec{a}$ (–3,2).

Искомый конец имеет координаты (2 – 3, 0 + 2) = (–1,2).

С-13

1. Координаты центра (–3, y_0). Из условия касания $y_0 = 2$,
R = |–3–0| = 3 $\Rightarrow$ уравнение окружности $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

2. $\begin{cases} 3x_0 + 4y_0 + 7 = 0 \\ 3x_0 - y_0 - 5 = 0 \end{cases}$; $5y_0 = -12$, $y_0 = -\frac{12}{5}$; $3x_0 - \frac{12}{5} = 5$,

$x_0 = \frac{25 - 12}{5 \cdot 3} = \frac{13}{15}$; $\left(\frac{13}{15}, -2\frac{2}{5}\right)$ — искомая точка пересечения прямых.

С-14

1. Коэффициент угла наклона касательной k = $\frac{-2 - 0}{4 - 0} = -\frac{1}{2}$;

$y = -\frac{1}{2}x + c$, $c = 0$, т.к. прямая проходит через (0, 0) $\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{2}x$.

2. Радиус окружности равен 2, самая нижняя точка окружности
(2, 1) $\Rightarrow$ окружность не пересекает Ox.

С-15

1. sin127 ≈ 0,7986; cos127 ≈ – 0,6018; tg127 ≈ – 1,3270;
sin100 15′ ≈ 0,9841; cos100 15′ ≈ – 0,2616; tg105 10′ ≈ – 3,689.

2. $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

С-16

1. $B_1\left(\frac{2-2}{2}; \frac{-3+3}{2}\right) = (0, 0)$; $C_1\left(\frac{2+6}{2}; \frac{-3-3}{2}\right) = (4, -3)$; $|B_1C_1| = \sqrt{16+9} = 5$.

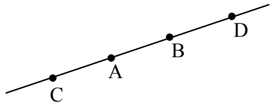
Коэффициент угла наклона $-\frac{3}{4} = k$; $y = -\frac{3}{4}x$;

2. R = $\left|\frac{-4-0}{2}\right| = 2$.

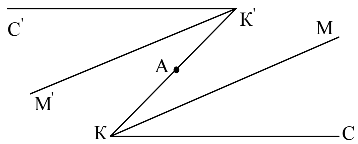
$x_0 = 0 - 2 = -4 + 2 = -2$; $y_{0_1} = 0 - 2 = -2$, $y_{0_2} = 2$ $\Rightarrow$ $(x+2)2 + (y + 2)2 = 4$.

3. R = 5, $y_0 = -3$ $\Rightarrow$ верхняя точка окружности (0,2) $\Rightarrow$ прямая не пересекает окружность.

С-17

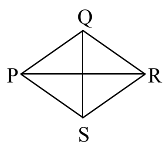


1. На прямой АВ от точки А отложим отрезок АС = АВ, так, чтобы С и В не совпадали, и отрезок BD = АВ от точки В в направлении противоположном точке А.



2. Строим точки K_1, M_1 и C_1 симметричные точкам К, М, С относительно А. Угол $M_1K_1C_1$ — искомый.

С-18



1. Точка R — симметрична Р относительно QS по свойству ромба.

2. Ромб, не являющийся квадратом, имеет две оси симметрии — его диагонали.

С-19

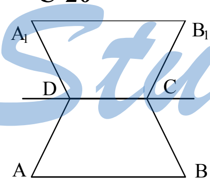
1. Следовательно, точка (–1;0) при данном параллельном переносе перейдет в точку (–2;–3), а точка (2;1) в точку (1;–2).

$$\begin{cases} x' = -1-1 \\ y' = 0-3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = 2-1 \\ y' = 1-3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = -2 \end{cases}.$$

2. Если такой параллельный перенос существует, то система имеет смысл:

$$\begin{cases} -1 = 0+a \\ 0 = 2+b \\ 1 = 2+a \\ -1 = 1+b \end{cases}; \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ a = -1 \\ b = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow$$ параллельный перенос существует.

С-20



1. Если точка не принадлежит прямой, то любой отрезок на прямой перейдет в параллельный отрезок. А если точка лежит на прямой, то прямая перейдет в себя.

2. Строим точки A_1, B_1 симметричные А и В относительно DC. Трапеция A_1B_1CD — искомая.

3. $\begin{cases} -2 = 5+a \\ 12 = 5+b \end{cases}; \quad \begin{cases} a = -7 \\ b = 7 \end{cases};$

$\begin{cases} x' = -1-7 \\ y' = 3+7 \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = -8 \\ y' = 10 \end{cases}.$ Значит, при данном параллельном переносе точка (–1, 3) переходит в точку (–8, 10).

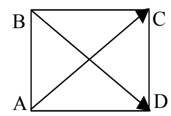
С-21

1. Строим аналогично задаче С-21 Вариант 2.

2. $\vec{b}-\vec{a} = (-1+1, -2-0) = (0,-2)$; $\vec{c}+\vec{b} = (-1-1, 1+2) = (-2,3)$;

3. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;

. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

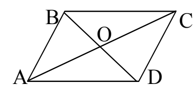


С-22

1. $|\vec{c}\,| = \sqrt{25+144} = 13$; $-\vec{c} = (-5, -12)$; $-\vec{e}_{\vec c} = \vec{e}_{-\vec c} = \left(-\dfrac{5}{13}, -\dfrac{12}{13}\right)$.

2. $3\vec{m} + 2\vec{n} = (3\cdot 0 - 2\cdot 2; -1\cdot 3 + 2\cdot 1) = (-4, -1)$.

3. $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$.



С-23

1. $\left(\vec{c};\vec{d}\right) = -\dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{3}{2}$; $|\vec{c}\,| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $|\vec{d}\,| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$;

$\cos \widehat{\vec{c}\ \vec{d}} = \dfrac{\left(\vec{c},\vec{d}\right)}{\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{d}\right|} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{3}{5}$; $\widehat{\vec{c}\ \vec{d}} = \arccos\dfrac{3}{5} \approx 53^\circ\,08'$.

2. $\left(\vec{a}+\lambda\vec{b},\vec{b}\right) = 0$; $(1-3\lambda)(-3) + (4+\lambda\cdot 2)2 = 0$;

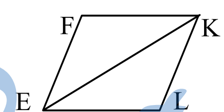
$-3 + 9\lambda + 8 + 4\lambda = 0$; $13\lambda = -5$; $\lambda = -\dfrac{5}{13}$.

С-24

1. а) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{EK}$;

б) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FL}$;

в) $\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{EL}$.



2. $\overrightarrow{FG}(3, -5)$; $\overrightarrow{FH}(3+1; 0-3) = (4, -3)$; $||\overrightarrow{FG}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$;

$||\overrightarrow{FH}| = \sqrt{16+9} = 5$; $(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FH}) = 12 + 15 = 27$;

$\cos \widehat{\overrightarrow{FG}\ \overrightarrow{FH}} = \dfrac{27}{\sqrt{34}\cdot 5}$; $\widehat{\overrightarrow{FG}\ \overrightarrow{FH}} \approx \arccos 22^\circ\,10'$.

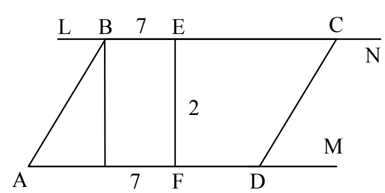
Вариант 4

С-1

1. $\angle$BAD = $\angle$BCD = 2$\angle$BAM = 70°;

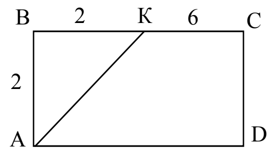
$\angle$ABC = $\angle$CDA =

= 180° – $\angle$BAD – 110°.



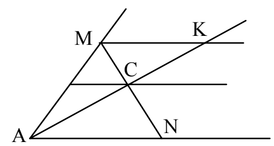
2. Построим луч AM, отложим на нем AD = 7 см.
Построим перпендикуляр EF = 2 см. Через точку F проведем прямую LN || AD. Построим окружность (A,3), она пересечет LN в точке B. Отложим на LN отрезок BC = 7 см = AD. Параллелограмм ABCD — искомый.

С-2



1. Δ ABK — равнобедренный ⇒ AB=BK = 2
P(ABCD) = 2(AB + BC) = 2(2 + 2 + 6) = 20
2. Данный ромб состоит из двух равносторонних треугольников ⇒ одна пара углов равна 60°, а другая 120°.

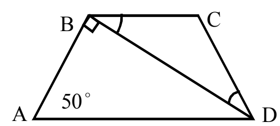
С-3



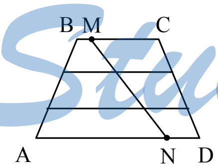
1. Проведем луч AC на нем отложим отрезок CK = $\frac{2}{3}$ AC. Проведем прямую KM||AD, KM ⋂ AB=M. Поведем прямую MC. MC ⋂ AD=N. Прямая MN — искомая. Δ ACN~ Δ KCM по двум углам $\frac{CK}{AC} = \frac{MC}{CN} = \frac{2}{3}$.

2. В Δ ABC MN — средняя линия, MN = $\frac{1}{2}$ d = $\frac{7}{2}$ см. Построенный четырехугольник — квадрат. ⇒ P(MNPQ) = 4MN = 4 · $\frac{7}{2}$ = 14 см.

С-4

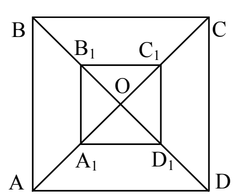


1. ∠ ABC= 180° – ∠ A = 180° – 50° = 130°;
∠ CBD = 130° – 90° = 40° = ∠ CDB;
∠ ADB = 90° – 50° = 40°;
∠ ADC = ∠ ADB + ∠ BDC=40°+ 40°= 80°;
∠ BCD = 180° – ∠ ADC = 100°.



2. Доказательство прямо следует из теоремы Фалеса.

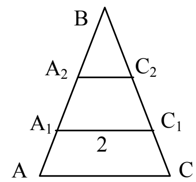
С-5



1. $\begin{cases} \angle B - \angle A = 90^\circ \\ \angle B + \angle A = 180^\circ \end{cases}$; $\begin{cases} \angle A = 45^\circ = \angle C \\ \angle B = 135^\circ = \angle D \end{cases}$.

2. $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник по задаче С-5 (2) Вариант 3.
Δ ABO = Δ ADO ⇒ их средние линии A_1B_1 и A_1D_1 равны ⇒ $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

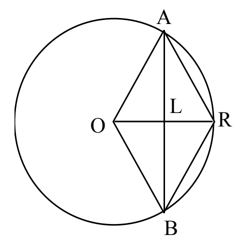
3. Аналогично С-5 (3) вариант 3.
$A_2C_2 = 1$ см,
$AC = 3$ см.



С-6

1 и 2 смотри С-6, вариант 3.

С-7



1. Половинки диагоналей — катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 9 см. А гипотенуза — сторона ромба

$\sqrt{12^2+9^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$ см.

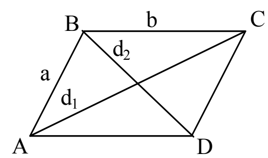
2. *Дано.* (O,R) — окружность 2R = 8 см,
AB — хорда, $OR \cap AB = L$, OL = LR.
Найти. AB.

Решение. R = 4 см; OL = 2 см. $\cos(\angle AOL) = \dfrac{OL}{AO} = \dfrac{\frac{1}{2}R}{R} = \dfrac{1}{2}$;

$\angle AOL = 60° \Rightarrow AL = AO \cdot \sin(\angle AOL) = R \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ см;

$AB = 2AL = 4\sqrt{3}$ см.

С-8



1. Если обозначить длину хорды $2l$, а расстояние от центра до хорды h, то из прямоугольного треугольника получим соотношение

$l = \sqrt{R^2 - h^2}$ при постоянном R чем меньше h, тем больше l.

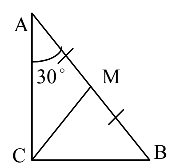
2. Из ΔABC и ΔABD; $d_1 < a + b$ и $d_2 < a + b \Rightarrow P(ABCD) = 2(a + b) > d_1 + d_2$.

С-9

1. $\sin 35°23' \approx 0{,}5791$; $\cos 35°23' \approx 0{,}8153$; $\operatorname{tg} 35°23' \approx 0{,}7103$;
$\sin 68°25' \approx 0{,}9299$; $\cos 68°25' \approx 0{,}3678$; $\operatorname{tg} 68°25' \approx 2{,}528$;
$\sin 82°58' \approx 0{,}9924$; $\cos 82°58' \approx 0{,}1225$; $\operatorname{tg} 82°58' \approx 8{,}105$.

2. а) $\alpha = 50°22'$; б) $\alpha = 84°28'$; в) $\alpha = 40°31'$.

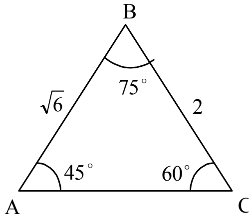
С-10



1. *Дано.* ΔABC, $\angle C = 90°$, AC = 3 см, $\angle A = 30°$, CM — медиана. *Найти*. CM.

Решение. CM = AM = MB как радиус описанной окружности. (Для прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы).

$AB = \dfrac{AC}{\cos 30°} = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$ см; $CM = AM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ см.



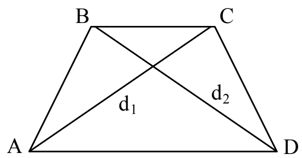
2. *Дано*. Δ ABC, $\angle$ A = 45°, $\angle$ C = 60°, BC = 2 см.
Найти. AC.
Решение. $\angle$ B = 180° – $\angle$ A – $\angle$ C = 75°;
sin 75°= sin(45° + 30°) =

$$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

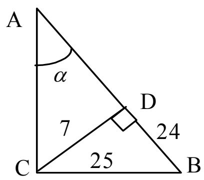
По теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin 75^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 45^\circ}$

$$AC = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 1 + \sqrt{3} \text{ см.}$$

С-11



1. *Дано.* ABCD равнобокая трапеция.
Доказать. P(ABCD)>AC + BD.
Доказательство. Применим неравенство треугольника к Δ ABD и Δ BCD,
BD<AB + AD, AC<AB + BC $\Rightarrow$ AC + AD + + AB+BC= AB + AD + CD + BC = P(ABCD).



2. *Дано.* Δ ABC, $\angle$ C = 90°, CD — высота, CD = 7 см, BD = 24 см. *Найти.* AB, BC, AC.
Решение. Из прямоугольного Δ CDB:

$$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 \text{ см;}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta CBD \Rightarrow \frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB};$$

$$AB = \frac{CB^2}{DB} = \frac{625}{24} = 26\frac{1}{24} \text{ см}; \quad AC = 7\sqrt{AB^2 - CB^2} = 7\frac{7}{24} \text{см.}$$

3. $c = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ см; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$;

$\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} \approx 26°34'$; $\beta = 90 - \alpha \approx 63°26'$.

С-12

1. A(2, 4), B(3, –1). Пусть $(x,y) \in$ AB, тогда AB $\cap$ Ox т.к. $-1<y<4$, но AB $\cap$ Oy, т.к. $2<x<3$.

2. $\vec{AD}$ (–2 + 1;–3 – 2) = (–1; –5).

Чтобы получить координаты точки С перенесем начало вектора $\overrightarrow{AD}$ в точку B, т.к. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, C(3 – 1, 1 – 5) = (2, –4).

С-13

1. Данный треугольник — прямоугольный $\Rightarrow$ центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2, 1)$, а радиус равен половине гипотенузы $R = \frac{1}{2}\sqrt{4+2} = \frac{1}{2}\sqrt{16+4} = \sqrt{5} \;\Rightarrow\; (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$.

2. Коэффициент угла наклона прямой $k = \frac{1+2}{-3-2} = -\frac{3}{5} \Rightarrow$ уравнение прямой

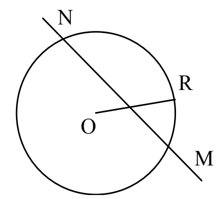
$y = -\frac{3}{5}x + c$, $(-3, 1) \in$ прямой $\Rightarrow 1 = -\frac{3}{5}(-3) + c$,

$c = 1 - \frac{9}{5} = -\frac{4}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$.

С-14

1. $2x+2y+3=0$, $y=-x-\frac{3}{2}$; $k=-1=\text{tg}\,\alpha$, $\alpha=135°$, $\beta=180°-\alpha=45°$.

Ответ: $\alpha = 135°$, $\beta = 45°$.



2. Предположим обратное: либо прямая касается окружности, либо не имеет с ней общих точек. Первый вариант невозможен, т.к. если прямая касается окружности — она имеет единственную общую точку с кругом, которая лежит на окружности, а в нашем случае такого не наблюдается. Второй случай также невозможен, поскольку прямая пересекает круг, а, значит, и окружность. $\Rightarrow$ Прямая пересекает окружность в двух точках.

С-15

1. $\sin 92°40' = 0{,}989$; $\cos 92°40' = -0{,}0465$; $\text{tg}\,92°40' = -21{,}47$;
$\sin 152°17' = 0{,}4651$; $\cos 152°17' = -0{,}8853$; $\text{tg}\,152°17' = -0{,}5254$.

2. $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{9}{14}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -4\frac{4}{9}$.

С-16

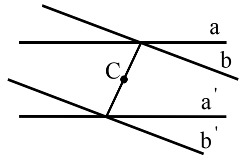
1. A_1 — середина АС, $A_1\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (0, 0)$;

$B_1\left(\frac{5+1}{2}, \frac{10-2}{2}\right) = (3,4)$; $\overrightarrow{A_1B_1} = (3,4)$; $k = \frac{4}{3}$; $y = \frac{4}{3}x$.

2. $R = \frac{6-0}{2} = 3$; $x_0 = 0 + 3 = 3$, $y_0 = 0 + 3 = 3$; $y_{0_2} = -3$;
$(x-3)^2 + (y \pm 3)^2 = 9$.

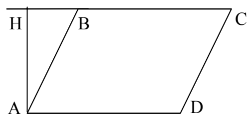
3. Центр окружности $(-2, 0)$, а $R = 3 \Rightarrow x \in [-5, 1] \Rightarrow$ прямая $x = -1$ пересекает окружность в 2-х точках.

С-17



1. Смотри С-17 (1) вариант 3.
2. Обе прямые перейдут в параллельные прямые, т.е. наша фигура сдвинется.

С-18



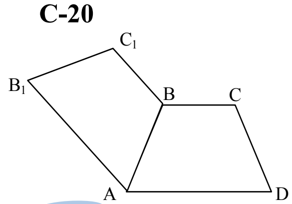
1. Проведем перпендикуляр АН к ВС На прямой АН от точки Н отложим отрезок НА′= АН. Точка А′ — искомая.
2. Параллелограмм имеет ось симметрии, если он ромб (две диагонали) или прямоугольник (две средний линии).

С-19

1. $\begin{cases}2=1+a\\0=2+b\end{cases}$; $\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$; $\begin{cases}x'=0+1\\y'=2-2\end{cases}$; $\begin{cases}x'=1\\y'=0\end{cases}$. Значит, при данном параллельном переносе точка (0;2) перейдет в точку (1;0), а точка (2;1) в точку (3;–1).

2. $\begin{cases}x'=2+1\\y'=1-2\end{cases}$; $\begin{cases}x'=3\\y'=-1\end{cases}$. **3.** $\begin{cases}x''=x'-1\\y''=y'-2\end{cases}$; $\begin{cases}x''=x+2-1\\y''=y+1-2\end{cases}$; $\begin{cases}x''=x+1\\y''=y-1\end{cases}$.

С-20

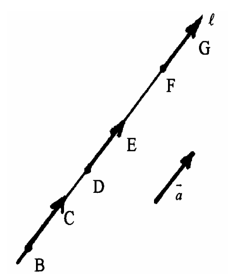


1. Т.к. при движении отрезки переходят в параллельные отрезки, то параллельные прямые переходят в параллельные. А прямые, параллельные пересекающимся, пересекаются.
2. Трапеция перейдет в равную ей трапецию AB_1C_1D.

3. $\begin{cases}3=2+a\\2=3+b\\4=1+a\\1=4+b\end{cases}$; $\begin{cases}a=1\\b=-1\\a=3\\b=-3\end{cases}$ $\Rightarrow$ такого параллельного переноса не существует.

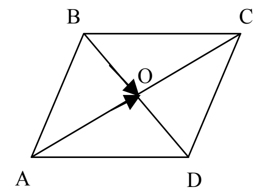
С-21

1. Вектор $\vec{a}$ должен быть параллелен прямой ℓ.

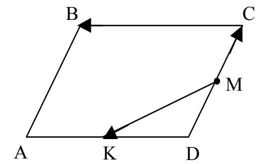


2. $\vec{a}-\vec{b}\,(1-2,1-2)=(-1,-1)$;
$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=(-1-1,-1+1)=(-2,0)$.

3. $\vec{AB} = \vec{AO} - \vec{BO}$; $\vec{DA} = -\vec{AO} - \vec{BO}$.



С-22



1. $\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{\ell} = \left(-\frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1; \frac{1}{3} + 0\right) = \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$.

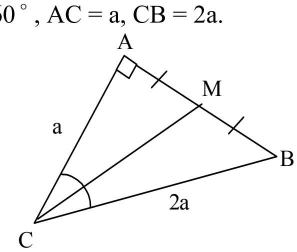
2. $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

3. $\begin{cases}\lambda\cdot 1 = -2\\ -2\cdot\lambda = 4\end{cases}$; $\begin{cases}\lambda = -2\\ \lambda = -2\end{cases} \Rightarrow \lambda\vec{a} = \vec{b}$; $-2\vec{a} = \vec{b}$;

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — противоположно направлены.

С-23

1. *Дано.* Δ ABC, M $\in$ AB, AM = MB, $\angle$ ACB = 60°, AC = a, CB = 2a.
Найти. MC.



Решение. $AB^2 = a^2 + 4a^2 - 2\cdot a\cdot 2a\cos 60^\circ$;

AB = $\sqrt{a^2 + 4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$;

AM = MB = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{CB}{\sin A}$;

sinA = $\frac{CB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{AB} = \frac{2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow$ A = 90°.

Из прямоугольного Δ CAM, CM = $\sqrt{CA^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3}{4}a^2} = a\frac{\sqrt{7}}{2}$.

2. $(\vec{m},\vec{n}) = 0$, $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{m}| - 3|\vec{n}|$;

$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{|\vec{m}| + 3|\vec{n}|}$; $|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b},\vec{b})} = \sqrt{|\vec{m}| + 3|\vec{n}|}$;

$\cos \vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b} = \frac{|\vec{m}| - 3|\vec{n}|}{\left(|\vec{m}| + 3|\vec{n}|\right)} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$; $\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b} = 120^\circ$.

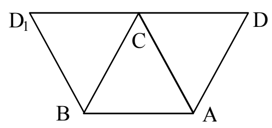
С-24

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

2. $\overrightarrow{AB}$ = (–3,2); $\overrightarrow{AC}$ = (–2,–3); $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = 6 – 6 = 0 $\Rightarrow$ $\angle$ A = 90°;

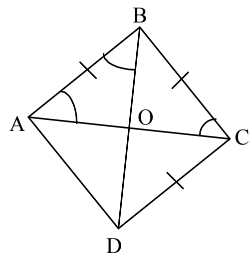
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow \angle \mathbf{B} = \angle \mathbf{C} = \mathbf{45^\circ}.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ



Д-1

Можно построить два параллелограмма ABCD и ACD_1B.



Д-2

1. Пусть в ромбе ABCD, $AC \cap BD = O$;

$\Delta ABO = \Delta BCO = \Delta CDO = \Delta DAO$ — прямоугольные равнобедренные $\Rightarrow \angle OAB =$ $= \angle OAD = 45^\circ \Rightarrow \angle A = 90^\circ \Rightarrow$ ABCD — квадрат.

2. $\Delta ABC = \Delta DAB = \Delta DCB$ (по трем сторонам) — равнобедренные $\Rightarrow \angle ABD = \angle CBD =$ $= \angle BAC = \angle BCA$.

Сумма углов ΔABC:

$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = \angle ABD + \angle CBD + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ =$ $= 4\angle BAC$; $\angle BAC = 45^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow$ ABCD — квадрат.

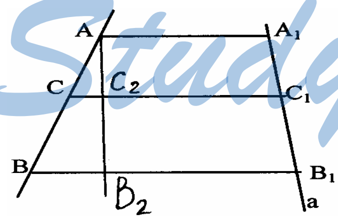
Д-3

1. Предположим обратное, тогда C и D лежат в разных полуплоскостях относительно AB. Но это не так, ведь DC не пересекает AB $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ C и D лежат в одной полуплоскости.

2. Аналогично 1.

3. Луч $AC \cap BD$, т.к. A и C лежат в разных полуплоскостях относительно BD. Таким образом, доказано и утверждение (4).

Д-4



1. Проведем прямую *a*, на ней возьмем точку A_1, соединим отрезком с A. Проведем отрезок $BB_1 \parallel AA_1$, получим точку B_1 на *a* из середины C_1 отрезка A_1B_1 проведем $C_1C \parallel AA_1, BB_1$. C — искомая.

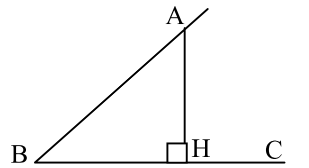
2. В наших построениях $\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{b}{c}$. Проведем прямую $AB_2 \parallel A_1B_1$;

$AB_2 \cap CC_1 = C_2$; $\Delta ABB_2 \sim \Delta ACC_2 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow AC(b+c) =$ $= bAB$; $b(AB - AC) = cAC = bBC$; $\frac{AC}{BC} = \frac{b}{c}$.

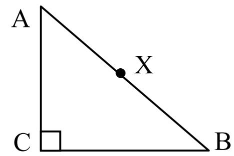
3. Доказывается по индукции с n пропорциональными отрезками и сводится к задаче (2).

Д-5

1. Основание перпендикуляра лежит на BC, потому что на AC оно не лежит.

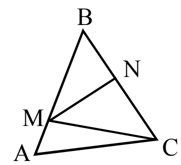


2. AX<AB, т.к. AX $\in$ AB (его часть).

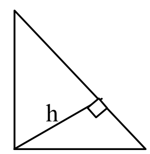


3. Проведем высоту BH. HB или HD больше HX $\Rightarrow$ одна из наклонных AB или AD больше AX.

4. По задаче (3) MC<BC или MC<AC;
MN<MC или MN<MB $\Rightarrow$ MN<AB или MN<AC илиMN<BC.



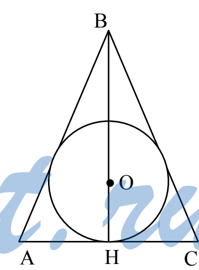
Д-6



1. Гипотенуза равна $\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$.

2. $c=\sqrt{a^2+b^2}$;

S(ABC) = $\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}h\cdot\sqrt{a^2+b^2}$; $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



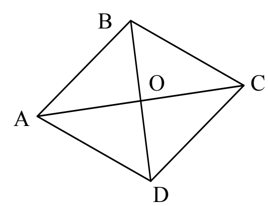
3. AC=6a, BH = 4a; BH — медиана и биссектриса;

AH = $\frac{1}{2}$ AC = 3a, AB = $\sqrt{AH^2+BH^2}=5a$;

P = $\frac{2AB+AC}{2}=5a+3a=8a$;

$\tau=\frac{S}{P}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot BH}{P}=\frac{\frac{1}{2}4a\cdot 6a}{8a}=\frac{3}{2}a$.

4. Δ ABO — прямоугольный.



AO = $\frac{1}{2}$ AC = 4a; BO = 3a;

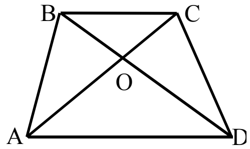
AB = $\sqrt{AO^2+BO^2}=5a$;

S(ABO) = $\frac{1}{4}$ S(ABCD) = $\frac{1}{2}\cdot 3a4a=6a^2=$

$=\frac{1}{2}$ AB$\cdot\ \tau\ =\frac{1}{2}5a\cdot\ \tau$;

$$\tau = \frac{2 \cdot 6a^2}{5a} = \frac{12a}{5} = \frac{12}{5}a.$$

Д-7



Дано. ABCD — трапеция,
AB = BC = CA = a, $\angle$ABD = 90°.
Найти. AD.
Решение. ΔBCD — равнобедренный $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\angle$CBD = $\angle$CDB = α.
$\angle$BDA = $\angle$CBD = α как накрест лежащие $\Rightarrow$ $\angle$ADC = 2α;

$\angle$C = 180° – 2α. Из ΔBCD $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{BD}{\sin(\pi - 2\alpha)}$;

BD = $\dfrac{a\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ = 2$a$cosα. Но $\dfrac{BA}{AD}$ = sinα = $\dfrac{a}{a\sqrt{1+4\cos^2\alpha}}$;

tgα = $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{a}{2a\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; sin$\alpha$ = $\dfrac{1}{2}$; α = 30° $\Rightarrow$ AD = 2AB = 2a.

Д-8

1. а) нет, 2 + 5 = 7; б) да, 4 + 8>11; в) нет, 5 + 6<12.
2. 1) да, 7 + 7>13; 2) нет, 7 + 5<13.
3. d<0,6 + 3,2 = 3,8; d = 1 или 2 или 3.
Если d = 1 или 2 одна лежит в другой не пересекая ее $\Rightarrow$ d = 3.
4. Во всех случаях треугольник с вершинами в точке пересечения окружностей и двумя центрами окружностей вырождается в отрезок $\Rightarrow$ Окружности касаются.

Д-9

1. M$\left(\dfrac{-12+5}{2};\dfrac{6-1}{2}\right) = \left(-3\dfrac{1}{2};2\dfrac{1}{2}\right)$.

2. $\overrightarrow{AB}$ = (12,5) = $\overrightarrow{DC}$ = (12,5), следовательно, AB || DC и AB = DC $\Rightarrow$ ABCD — параллелограмм.

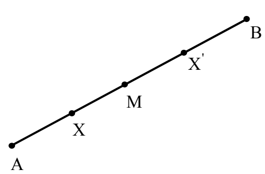
3. $\overrightarrow{BC}$ = (5,–12); $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{25+144}$ = 13 = $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ $\Rightarrow$ ABCD — ромб.

4. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ = 12 · 5 – 5 · 12 = 0 $\Rightarrow$ $\angle$ABC = 90 $\Rightarrow$ ABCD — квадрат.

Д-10

x_0 = –6, y_0 = 8, R = 7; $x \in$ [–13,1], $y \in$ [1,15] $\Rightarrow$ окружность пересекает Oy и не пересекает Ox.

Д-11

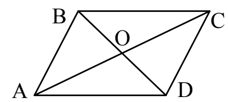


1. Дан отрезок AB, M $\in$ AB, AM = MB.
Доказать. M — центр симметрии отрезка AB.
Доказательство. A и B — симметичны относительно M по определению. И для любой точки X из AM найдется симметричная X$'$ из MB и наоборот.

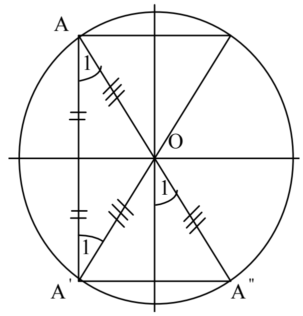
2. Пусть какая-то вершина не переходит в вершину, тогда в полученном четырехугольнике будет меньше вершин, чего быть не должно. Значит, каждая вершина переходит в себя.

3. *Дано*. ABCD — четырехугольник, O — центр симметрии.

Доказать. ABCD — параллелограмм.



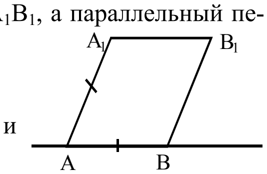
Доказательство. Используя результат предыдущей задачи и тот факт, что при симметрии точа A может перейти только в C, а B только в D, получим, что диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. $\Rightarrow$ ABCD — параллелограмм.



4. Если у фигуры есть только две оси симметрии, то они перпендикулярны. Ведь при симметрии относительно одной другая должна перейти в себя. Далее найдем точку A' фигуры симметричную A относительно первой оси. И точку A'' симметричную A' относительно другой оси. Если O — точка пересечения осей, то A и A'' симметричны относительно O (из равенства некоторых прямоугольных треугольников). Но т.к. точка A — произвольная, то O — центр симметрии фигуры.

Д-12

1. Длина $A_1B_1 = AB = 4$ см, т.к. AB переходит в A_1B_1, а параллельный перенос сохраняет расстояния.



2. $AA_1 \parallel BB_1$, т.к. $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ коллинеарны.

3. AA_1B_1B — параллелограмм, т.к. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ и ромб, т.к. $AA_1 = AB$.

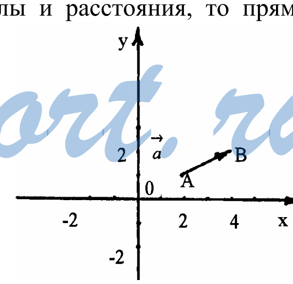
4. Т.к. параллельный перенос сохраняет углы и расстояния, то прямоугольник переходит в прямоугольник.

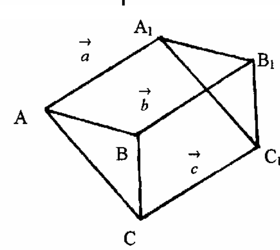
Д-13

1. Смотри С-21 вариант 1.

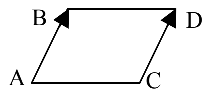
2. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\vec{B} = (2 + 2, 1 + 1) = (4,2)$.

Соединим A и B отрезком, а направление вектора $\overrightarrow{AB}$ будет от A к B.



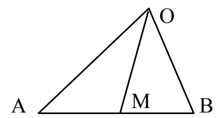


3. На рисунке AA_1C_1C — параллелограмм. $\vec{a}$ и $\vec{c}$ сонаправлены $\Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$.

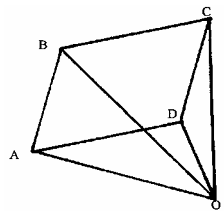


4. Параллельный перенос — сдвиг на вектор $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Д-14



1. Если достроить Δ AOB до параллелограмма, то OM — половина диагонали $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

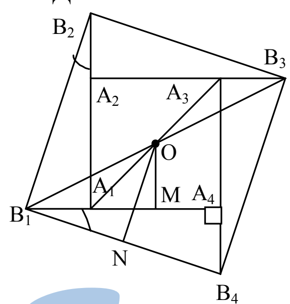


Дополнительное задание. Преобразуем равенство:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (тождество) $\Rightarrow$ равенство верно.

Д-15



1. Прямоугольные Δ $B_4A_4B_1$ и Δ $B_1A_1B_2$ равны по двум катетам $\Rightarrow$ $B_4B_1 = B_1B_2$; $\angle A_4B_1B_4 = \angle B_1B_2A_1$, но $\angle B_1B_2A_1 +$
$+ \angle B_2B_1A_1 = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\angle A_4B_1B_4 + \angle B_2B_1A_1 =$
$= \angle B_2B_1B_4 = 90^\circ$.

Аналогично, рассматривая остальные треугольники получим $B_1B_2B_3B_4$ — прямоугольник с равными сторонами $\Rightarrow$ он квадрат.

2. Докажем, что $\angle B_4B_1B_2 = 90^\circ$;

$\overrightarrow{B_1B_4} = \overrightarrow{B_1A_4} + \overrightarrow{A_4B_4}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_1B_2} + \overrightarrow{B_1A_4}$.

$$\left(\overrightarrow{B_1B_4}, \overrightarrow{B_1B_2}\right) = \left(\overrightarrow{B_1A_4}, \overrightarrow{A_1B_2}\right) + \left(\overrightarrow{B_1A_4}, \overrightarrow{B_1A_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_4B_4}, \overrightarrow{A_1B_2}\right) + \left(\overrightarrow{A_4B_4}, \overrightarrow{B_1A_1}\right) =$$

$$= 0 + \left(\overrightarrow{B_1A_4}, \overrightarrow{B_1A_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_4B_4}, \overrightarrow{A_1B_2}\right) + 0 = \left|\overrightarrow{B_1A_4}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_1A_1}\right| - \left|\overrightarrow{A_4B_4}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1B_2}\right| = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\angle B_4B_1B_2 = 90^\circ$.

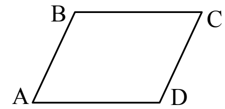
Дополнительное задание. Рассмотрим ΔB_1OA_1, $\angle OA_1B_1 = 135^\circ$, $\angle \varphi = 30^\circ$ $\Rightarrow$ $\angle OB_1A_1 = 15^\circ$.

По теореме синусов $\frac{B_1O}{\sin 135^\circ} = \frac{A_1O}{\sin 15^\circ}$; $\frac{B_1O}{\frac{1}{2}} = \frac{A_1O}{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$;

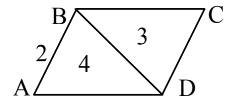
$$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)B_1O = \mathrm{A_1O} \Rightarrow \mathrm{A_1A_3} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)B_1B_3\ .$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Смотри С-5 (2) вариант 1.

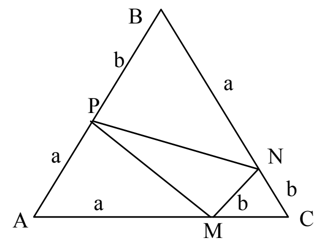


2. Дано ABCD — четырехугольник.
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180°$;
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$;
$180° + \angle C + \angle D = 360°$;
$\angle C + \angle D = 180° \Rightarrow AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм.



3. Задача имеет три решения:
$P_1 = 2(2 + 3) = 10$ см;
$P_2 = 2(3 + 4) = 14$ см;
$P_3 = 2(2 + 4) = 12$ см.

4. Задача имеет 3 решения: $P_1 = 2(AB + BC) = 18$ см;
$P_2 = 2(BC + AC) = 22$ см; $P_3 = 2(AB + AC) = 20$ см.

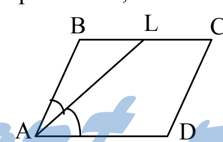


5. MPBN — параллелограмм, PM = BN,
MN = PB.
Из равнобедренных ΔAPM и ΔMNC,
AP = PM, MN = NC $\Rightarrow$ P(MPBN) =
MP + PB + BN + MN =
= AP + PB + BN + NC = AB + BC $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ P(MPBN) не зависит от выбора точки.

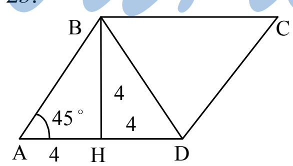
6. P(ABD) = AB + AD + BD = 25 см;
P(ABCD) = 2(AB + AD) = 30 см $\Rightarrow$ AB + AD = 15 см,
BD + 15= 25, BD = 10 см.

7. AB – AD = 10 см;
а) AD = 6 см; AB – 6 = 10, AB = 16 см; P(ABCD) = 2(6 + 16) = 44
б) AB = 13 см, 13– AD = 10; AD = 3 см; P(ABCD) = 2(13 + 3) = 32 см.

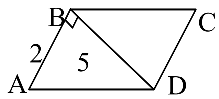
8. *Дано.* ABCD — параллелограмм, AL — биссектриса $\angle A$,
BL = a, LC = b.



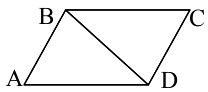
Найти. P(ABCD).
Решение. ΔABL — равнобедренный (т.к.
$\angle ALB = \angle LAD$ как направляющие и
$\angle BAL = \angle LAD$) AB = BL = a, BC = $(a + b)$;
P(ABCD) = 2(AB + BC) = $2(a + a + b) = 4a + 2b$.



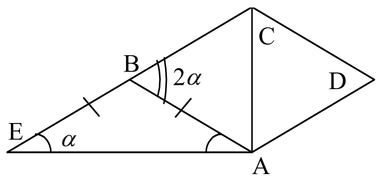
9. *Дано.* ABCD — параллелограмм,
$\angle A = 45°$, BH — высота, BH = 4 см,
AH = HD, BD — диагональ.
Найти. P(ABCD), $\angle BDA$, $\angle BDC$.
Решение. ΔABH — равнобедренный, прямоугольный $\Rightarrow$ AH = BH = HD = 4 см,
$AB = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ см,
$P(ABCD) = 2(AD + AB) = 2(8 + 4\sqrt{2}) = 16 + 8\sqrt{2}$ см,
$\Delta ABH = \Delta DBH \Rightarrow \angle BDA = \angle A = 45°$;
$\angle HBD = \angle A = 45°$, $\angle BDC = \angle ABD = \angle ABH + \angle HBD = 90°$.



10. Строим прямоугольный Δ ABD, $\angle B = 90^\circ$, AB = 2 см, AD = 5 см. Достраиваем его до параллелограмма ABCD.

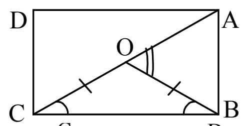


11. Строим угол A равный данному. На его стороне откладываем AD. Из точки D проводим окружность радиусом равным диагонали. Точка пересечения угла и окружности C. Достраиваем Δ ABD до параллелограмма ABCD.

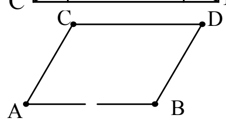


12. Строим угол E равный половине данного.

Откладываем EC = $\frac{1}{2}$P(ABCD). Опускаем на другой луч перпендикуляр CA = d. Строим $\angle$CBA равный данному. Достраиваем Δ BCA до параллелограмма ABCD.



13. Используя предыдущий результат стоим треугольник OAB по полусумме диагоналей, стороне и углу противоположному стороне. Затем достраиваем Δ OAB до параллелограмма ABCD.



14. Возьмем произвольную точку C. От точки B отложим $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. По свойству параллелограмма $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, а $\overrightarrow{CD}$ можно измерить.

15. Смотри задачу 14.

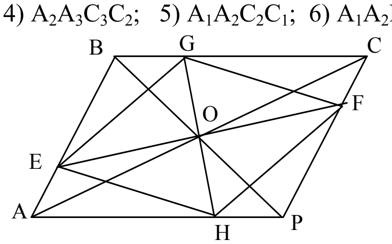
16. Δ KAO = Δ LDO по катету и противоположному углу $\Rightarrow$ AO = OD. Аналогично, Δ KOC = Δ LOC $\Rightarrow$ CO = OB $\Rightarrow$ ABCD — параллелограмм, диагонали точкой пересечения делятся пополам. $\Rightarrow$ AB = CD.

17. 1) $A_1A_3C_3C_1$; 2) $A_1A_3B_3B_1$; 3) $B_1B_3C_3C_1$

2. $\left(\frac{4(4-1)}{2}\right)^2 = 36$;

3. По индукции получаем общую формулу $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$.

4) $A_2A_3C_3C_2$; 5) $A_1A_2C_2C_1$; 6) $A_1A_2B_2B_1$; 7) $A_2A_3B_3B_2$

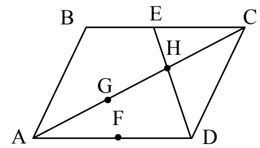


8) $B_3C_3C_2B_2$; 9) $B_1B_2C_2C_1$

18. OG = OH, EO = OF.
Т.к. O — центр симметрии $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ EGFH — параллелограмм (диагонали точкой пересечения делятся пополам).

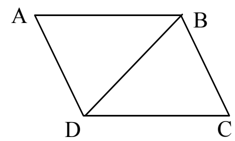
19. $\Delta EAO = \Delta CFO$ по двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow EO = OF$, $\angle AEO = \angle CFO \Rightarrow$ прямая EF проходит через O, аналогично, $GO = HO$, GH проходит через O $\Rightarrow$ EGFH — параллелограмм.

20. BFDE — параллелограмм, $BE = FD \Rightarrow BF \parallel ED$. В ΔBGC, EH — средняя линия $\Rightarrow GH = HC$. В ΔAHD, GF — средняя линия $\Rightarrow AG = GH \Rightarrow$ $\Rightarrow AG = GH = HC$.



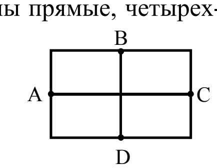
21. Для доказательства 5.2 используется свойство противолежащих сторон параллелограмма, которое доказывается в 6.3, а 6.3. доказывается с помощью 6.2., что недопустимо.

22. $\Delta ABD = \Delta CDB$ по трем сторонам $\Rightarrow \angle ADC = \angle ABC$; $\angle DAB = \angle BCD$; $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow AD \parallel BC$. Аналогично, $AB \parallel DC \Rightarrow$ ABCD — параллелограмм.

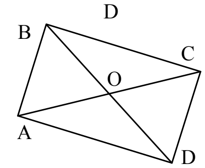


23. Четвертый угол $\angle D = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow$ противоположные стороны параллельны и все углы прямые, четырехугольник — прямоугольник.

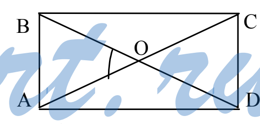
24. Проведем через B и D прямые параллельные BD. Точки пересечения прямых — вершины искомого прямоугольника.



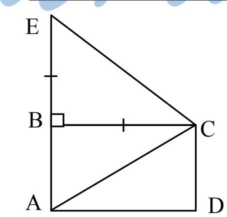
25. Если даны O, A, B, то сроим точки C, D симметричные A и B относительно O, ABCD — искомый прямоугольник.



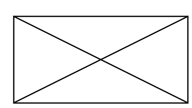
26. Пусть дана AB, стоим равнобедренный ΔAOB, $AO = OB$ с заданным углом O. Достраиваем ΔAOB до прямоугольника.



27. Строим ΔEAC по $\angle E = 45^\circ$; $EA = \frac{P}{2}$ и $AC = d$. Из точки C опустим на EA перпендикуляр CB. Достраиваем ΔABC до прямоугольника ABCD.



28. Должно выполняться равенство диагоналей.

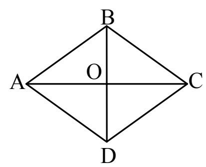


29. $\frac{a}{b}=\frac{16}{11}$; a-b=250; b=$\frac{11a}{16}$, a-$\frac{11a}{16}$=250; $a\cdot\frac{5}{16}$ = 250,

$a = 16\cdot 50 = 800$ м; $b = 550$ м; Скорость сторожа $\frac{200}{3}$ м/мин.

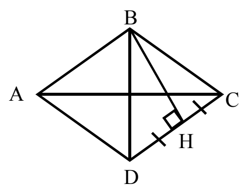
$P = 2(a + b) = 2700$ м; $T = \frac{P}{\frac{200}{3}}=\frac{2700}{200}\cdot 3$ = 40,5 мин.

30. При нерациональном раскрое каждой детали расходуется 175 пог. мм стандартной полосы. При рациональном раскрое заготовки соответствующим образом переставляются, в результате чего достигается экономия $A_1K = x$ пог. мм на каждую пару. Определим
x: $A_1K = x = A_1P – KP = 175 – KP$; $KP = DC_1 + C_1D$
$C_1D_1 = 60$ мм, $DC_1 = CD = 60$ мм $\Rightarrow PK = DC_1 + C_1D_1 = 60 + 60 = 120$ мм, а,значит, $A_1K = 55$ мм. Значит, при изготовлении 200 деталей экономится 55 200=5,5 пог. м. стандартной полосы.



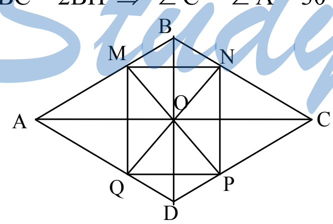
31. $\frac{\angle BAO}{\angle ABO}=\frac{4}{5}$; $\angle$BAO+$\angle$ABO=90°; $\angle$ABO + $+\frac{4}{5}\angle$ABO = 90°; $\angle$ABO = 50°, $\angle$BAO = 40°;

$\angle$DAB = 2$\angle$BAO = 80°, $\angle$ABC = 100°.

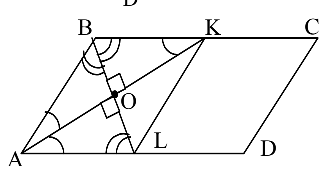


32. Т.к. BH — высота и медиана Δ DBC, то DB = BC = CD $\Rightarrow$ Δ DBC — равносторонний, $\angle$C = $\angle$A = 60°;
$\angle$ABC= $\angle$ADC=120°.

33. P = 16 см, BH = 2 см $\Rightarrow$ BC = 4 см. В прямоугольном Δ BHC, BC = 2BH $\Rightarrow$ $\angle$C = $\angle$A = 30°, $\angle$B = $\angle$D = 150°.



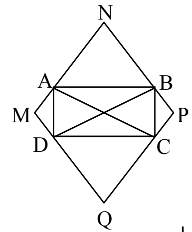
34. MO = ON = OP =OQ как высоты равных треугольников $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ MNPQ параллелограмм с равными диагоналями $\Rightarrow$ MNPQ — прямоугольник.



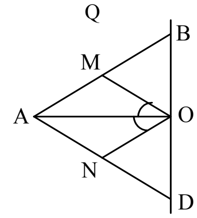
35. $\angle$BAD + $\angle$ABK = 180°,
2$\angle$BAO + 2$\angle$ABO = 180°;
$\angle$BAO+ABO=90° $\Rightarrow$ $\angle$BOA= 90° $\Rightarrow$
вертикальный $\angle$KOL=90°;
$\angle$ABO = $\angle$ALO = $\angle$LBK,

Δ ABO = Δ ALO = Δ BKO по катету и острому углу $\Rightarrow$ AL = BA = BK $\Rightarrow$ ABKL — параллелограмм с прямым углом между диагоналями $\Rightarrow$ ABKL — ромб.

36. Загибаемые: Δ ANB, Δ BPC, Δ AMD, Δ DCQ покроют площадь конверта стороны MN, PQ || DB; MQ, NP || AC.

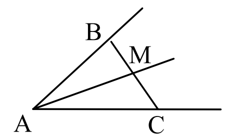


37. Смотри 25.

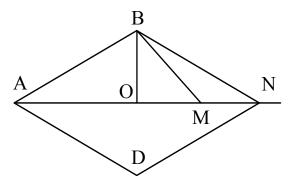


38. Пусть заданы O, M, N. Проведем луч OA так, что $\angle AOM = \angle AON$. Проведем прямую $OH \perp OA$. Из точке M и N очертим окружности радиуса OM, они пересекут OA и OH в точках A, B и D. Достроим Δ ABD до ромба ABCD.

39. Достаточно односторонней линейки: на сторонах угла A отложим отрезки AB = AC. На середине BC отметить точку M. BM — искомая биссектриса.



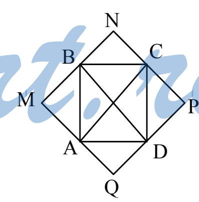
40. Строим $\angle$ BAN равный половине данного, откладываем на луче AM = $\dfrac{d_1 + d_2}{2}$ и на другом луче AB, так, чтобы $\angle AMB = 45^\circ$. Опускаем перпендикуляр BO к AN,



BO = OM = $\dfrac{d_2}{2}$; AO = AM – OM = $\dfrac{d_1}{2}$.

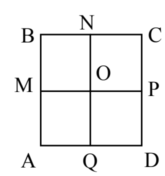
Достраиваем Δ ABO до ромба ABCD.

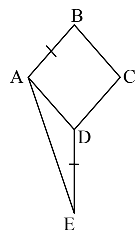
41. MNPQ — параллелограмм (т.к. противоположные стороны параллельны) и квадрат, поскольку соседние стороны перпендикулярны и равны диагонали. MN||BO, NP|| AC, AC || BD $\Rightarrow$ $\Rightarrow MN \perp NP$, MNPQ — квадрат.



42. Т.к. диагонали равны, то и их половинки равны, а они являются радиусом описанной окружности.

43. MP и NQ — средние линии $\Rightarrow$ MO = ON = = OP = OQ — расстояния от O до сторон равны радиусу вписанной окружности.



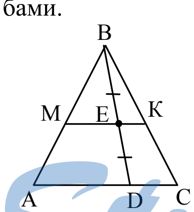


44. Строим угол E=22°30′, откладываем на луче отрезок EB = $a + d$; на другом луче EA так, чтобы $\angle$ EBA = 45°. На EB ставим точку D, так что $\angle$ ADB = 45°, Δ ADE — равнобедренный, AD = DE = a, BD = d. Достраиваем ABD до квадрата ABCD.

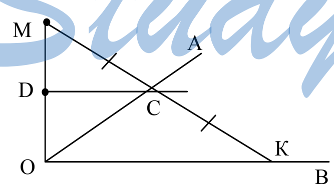
45. Нет, диагонали должны точкой пересечения делиться пополам.
46. Да, ведь две диагонали квадрата — оси симметрии.
47. Площадь листа должна быть $60 \cdot 60 \cdot 50 = 180000$ мм поделив на ширину получим 600 мм.

48. Достаточно линейкой измерить ширину рамки и отложить равные ей отрезки с обеих сторон рейки.

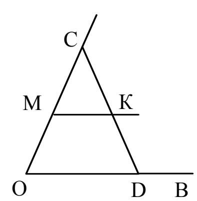
49. Для составления квадрата потребуется не менее 7 палочек, поэтому сторона квадрата >7. Но сумма длин всех палочек 45, поэтому из них не получится квадрат с стороной >11. Из палочек набора можно составить отрезки длиной в 7, 8, 9, 10 и 11 см следующими способами:
$7 = 1 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$; $8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$;
$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$; $10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$;
$11 = 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5 \Rightarrow$ квадраты с сторонами 7 и 8 можно составить одним способом и квадраты со сторонами 9, 10, 11 пятью способами.



50. Для Δ ABD ME — средняя линия $\Rightarrow$ BE = ED.

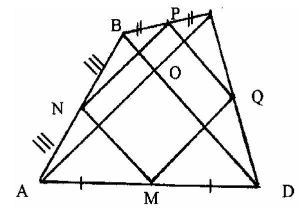


51. Соединим M и O отрезком.
D — середина MO.
Проведем DC $\parallel$ OB. Проведем прямую MC. MC $\cap$ OB = K.
В Δ OMK, DC — средняя линия $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ MC = CK.

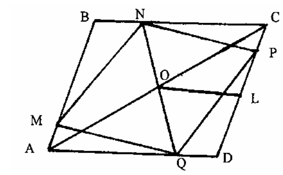


52. Проведем KM $\parallel$ OB, KM $\cap$ OA = M.
На OA отложим отрезок MC = MO. В Δ OCB, MK — средняя линия $\Rightarrow$ AK = KD.

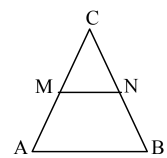
53. В Δ ABC и Δ ADC, NP и MQ — средние линии $\Rightarrow$ NP||AC и MQ || AC $\Rightarrow$ NP || MQ.
Аналогично, доказывается NM || PQ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ MNPQ — параллелограмм.



54. Проведем в Δ ACD среднюю линию OL || AD. Прямая OL $\cap$ NQ в ее середине $\Rightarrow$ O_1 = MP $\cap$ NQ лежит на OL. Аналогично, O_1 лежит на OK — средней линии Δ ACB $\Rightarrow$ O и O_1 совпадают.



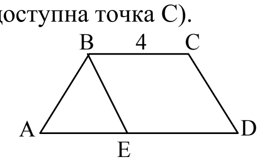
55. Построив Δ ABC со средей линией MN, MN || AB, найдем AB = 2MN.



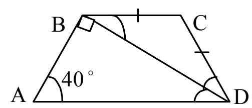
56. Аналогично 55.

57. Построения как в 55. Измеряем AM, NB. AC = 2AM, BC = 2NB. AB известно. P(ABC) = 2AM+2NB + AB. (Если недоступна точка C).

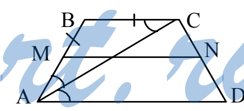
58. P(ABE) = AE + AB + BE = 12 см,
P(ABCD)=AE+AB+CD + BC + ED = 12 + 2DC= = 12 + 8 = 20 см.



59. $\angle$ ADB = 50° = $\angle$ CBD = $\angle$ CDB $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\angle$ ADC=100°, $\angle$ ABC = 90° + 50° = 140°; $\angle$ C = 180° – 50° – 50° = 80°.



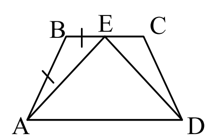
60. $\frac{BC}{AD} = \frac{2}{5}$; $\angle$ CAD = $\angle$ ACB = $\frac{1}{2}\angle$ BAD;
Δ ABC — равнобедренный $\Rightarrow$ AB=BC = CB;

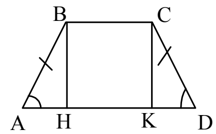


P(ABCD)=AD+3BC=132 см. 3BC + $\frac{5}{2}$ BC = 132; 11BC = 264; AD = $\frac{5\cdot 132}{11}$;

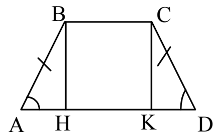
MN = $\frac{1}{2}$(AD + BC) = $\frac{1}{2}\left(\frac{5\cdot 132}{11}+\frac{2\cdot 12}{11}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{11}\cdot 11\cdot 12$ = 42 см.

61. Δ ABE и Δ ECD — равнобедренные ($\angle$ EAD = $\angle$ BEA, $\angle$ CED = $\angle$ EDA как накрест лежащие) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ AB = BE, EC = CD $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ AB + CD = BC.





62. В равнобокой трапеции $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$,
$\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle C + \angle D = 180^\circ$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$.



63. $\angle A = \angle D$, $\Delta ABH = \Delta DCK$
по катету BH=CK и острому углу $\Rightarrow$ AB = CD.

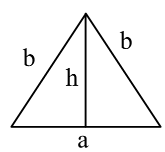
64. Если сумма противоположных углов трапеции равна 180°, то она равнобокая.

65. Середина сторон равнобокой трапеции — параллелограмм в силу 53, и диагонали, его перпендикулярны. Одна диагональ — высота трапеции, перпендикулярна основанию, другая — средняя линия, параллельна основанию $\Rightarrow$ данная фигура — ромб.

66. $P = 4a = 4$ см, $d = a\sqrt{2} = \dfrac{P}{4}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$ см,

67. $h = 3$ см, $a = \dfrac{3}{\cos 30^\circ} = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$ см.

68. $a + b = 7$ см, $c = 5$ см, $c = \sqrt{a^2 + (7-a)^2}$; $25 = 2a^2 - 14a + 49$;
$2a^2 - 14a + 24 = 0$; $a^2 - 7a + 12 = 0$; $a = 4{,}3$ см; $b = 4{,}3$ см.



69. $2b + a = 20$ см, $h = 6$ см; $a = 20 - 2b$,
$\dfrac{a^2}{4} = b^2 - h^2$; $\dfrac{(20-2b)^2}{4} = b^2 - 36$; $100 - 20b + b^2 =$
$= b^2 - 36$; $b = \dfrac{16}{5}$ см; $a = 20 - \dfrac{32}{5} = \dfrac{66}{5} = 13\dfrac{1}{5}$ см.

70. $a + b + c = 10$ см; $a = 4$ см, $b + c = 6$ см; $c = 6 - b$; $a^2 = c^2 - b^2$;
$16 = 36 - 12b + b^2 - b^2$; $b = \dfrac{20}{12} = \dfrac{5}{3} = 1\dfrac{2}{3}$ см; $a = 4$ см; $c = \dfrac{13}{3} = 4\dfrac{1}{3}$ см.

71. $a = b + 3$, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$, $c = \dfrac{5}{4}a$; $c^2 = a^2 + b^2$, $\dfrac{25}{16}a^2 = a^2 + a^2 - 6a + 9$;

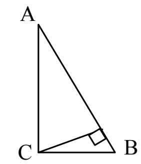
$\dfrac{9}{16}a^2 - 6a + 9 = 0$; $7a^2 - 96a + 14 = 0$; $D = 9216 - 28\cdot 14 = (12\cdot 6)^2$;

$a_1 = 12$ см; $a_2 = \dfrac{12}{7}$ — не удовлетворяет условию задачи, т.к. $b_2<0$;

$b = 9$ см; $c = \dfrac{5}{4}\cdot 12 = 15$ см.

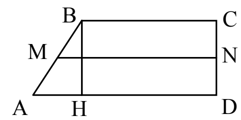
72. $2a + 2b = 28$, $d = 10$ м, $a + b = 14$ м; $a^2 + (14 - a)^2 = d^2$;
$a^2 + 196 - 28a + a^2 = 100$; $2a^2 - 28a + 96 = 0$;
$a^2 - 14a + 48 = 0$; $a = 6$ м, $b = 8$ м.

73. Δ CHB~ Δ ACB $\Rightarrow \dfrac{CD}{CB}=\dfrac{AC}{AB}$;



CD = $\dfrac{CB\cdot AC}{AB}=\dfrac{ab}{c}$.

74. $\angle$ B = 135°, MN = 18 см; $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{6}$; AD = 8BC;



MN = $\dfrac{1}{2}$(AD + BC) = $\dfrac{9}{2}$ BC;

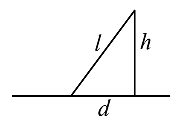
$\dfrac{9}{2}$ BC = 18; BC = 4 см $\Rightarrow$ AD = 32 см;

AH = AD – BC; Δ AHB — прямоугольный равнобедренный;

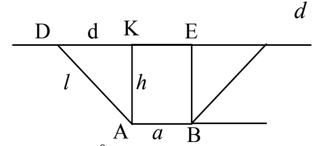
AH = BH = 28 см, AB = $\sqrt{AH^2+BH^2}=28\sqrt{2}$ см.

75. В данном доказательстве неверно то, что точка R лежит между точками A и C.

76. $d=\sqrt{l^2-h^2}=\sqrt{(20{,}2)^2-(18{,}62)^2}=\sqrt{61{,}3}\approx 7{,}8$ м.



77. $x=a+2\sqrt{l^2-h^2}=$



$120+2\sqrt{(2800)^2-(500)^2}=$

$=120+2\cdot 2755=5630$ м.

78. Δ CMF — прямоугольный, т.к. $\angle$ CMF $=90^0$ и MB $\perp$ CF $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ MB^2 = BF · BC, но MB = $\dfrac{1}{2}$ MA, BC = h, а BF = $D-h$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{l^2}{4}=(D-h)\cdot h$ или $\dfrac{l^2}{4}+h^2=Dh$ откуда $D=h+\dfrac{l^2}{4h}$.

79. Из Δ ADB BD = h = $\sqrt{\dfrac{289}{4}-\dfrac{225}{4}}=4$ м; AE = ER = RB = $\dfrac{17}{6}$ м;

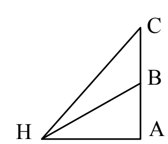
AF = FQ = QD = $DQ_1=Q_1F_1=F_1C_1=\dfrac{15}{6}$ м; AQ = 5 м, AR = $\dfrac{17}{3}$ м.

Из Δ EFA, EF = $\sqrt{\dfrac{289}{36}-\dfrac{225}{36}}=\dfrac{8}{6}=1\dfrac{1}{3}$ м.

Из Δ RQA, RQ = $\sqrt{\dfrac{289}{9}-25}=\dfrac{8}{3}=2\dfrac{2}{3}$ м.

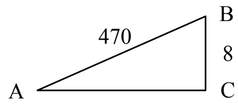
80. Из Δ ABO, AB = $\sqrt{AO^2-BO^2}\approx 2072$ км.

81. AB=79,5 м, $\angle$ AHB=20°45′; $\angle$ AHC = 63°30′.



В Δ BAH, AH = $\dfrac{AB}{tg20^245'}\approx 209{,}8$ м.

В Δ CAH AC = AH · tg63°30′ $\approx$ 421 м.



82. Из Δ ACB,

$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \approx 0{,}0170$; $\alpha \approx 59'$.

83. Радиус BD действия крана ищем из прямоугольного Δ BCD BD = BC $\cdot$ cosCBD = 9 $\cdot$ cos26° $\approx$ 8,09 м.

84. Предположим, что катер выходит под углом α к первоначальному направлению крейсера и через x ч встретится с крейсером, тогда BC=36 $\cdot$ x, AC=54 $\cdot$ x. Из прямоугольного Δ ABC $\sin\alpha = \frac{36x}{54x} \approx 0{,}6667 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \approx 41°48'$.

85. Глубина станции AO = 20 см $\cdot$ 170 = 3400 см = 34 м.
Из Δ ADC: AC = $\sqrt{1600+400} \approx 44{,}72$ см. Длина лестницы AB = 170 $\cdot$ AC = 170 $\cdot$ 44,72 = 7602 см $\approx$ 76 м. Из прямоугольного Δ AOB $\sin\alpha = \frac{AO}{AB} = \frac{34}{76} = 0{,}4474 \Rightarrow \alpha \approx 26°34'$.

86. Из Δ ACB: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{20}{800} = 0{,}025 \Rightarrow \alpha \approx 1°26'$.
Самолету следует подниматься под углом $> \alpha$.

87. Подъем ступени BC = 15,5 см, а ее ширина AC = 32,5 см. Из прямоугольного Δ ACB: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC} \approx 0{,}4769 \Rightarrow \alpha \approx 25°30'$.

88. В Δ ABC, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

89. В Δ ABC, BC = x = AC$\mathrm{tg}\,\alpha$ = 1200 $\cdot$ tg25°17′ $\approx$ 567 м;
AB = $y = \frac{AC}{\cos\alpha} \approx 1327$ м.

90. а) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 1 = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 1 =$
$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1 = 2\sin^2\alpha$;
б) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1$;
в) В условии, вероятно, опечатка, следует писать
$(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha)\sin^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \sin^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 - \mathrm{ctg}^2\alpha$.
Если подставить в условие α =30°, то $(1 + \mathrm{ctg}^3 30°)\sin^2 30° -$
$- \mathrm{ctg}^4 30° = (1+3\sqrt{3})\frac{1}{4} - 9 \neq 1-3 = 1 - \mathrm{ctg}^2 30°$ как пишут в ответах.
г) $(1 - \mathrm{tg}^4\alpha)\cos^2\alpha = (1 - \mathrm{tg}^2\alpha)(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha =$
$= (1 - \mathrm{tg}^2\alpha) \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha = 1 - \mathrm{tg}^2\alpha$;

д) $2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha = 2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1\right) =$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

е) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 - \mathrm{ctg}^2\alpha$;

ж) $\dfrac{\sin^2\alpha(1-ctg^2\alpha)^2+\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha\left(2-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)^2+\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} =$

$= \dfrac{4\sin^2\alpha - 4 + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} = \dfrac{-3\cos^2\alpha + \dfrac{1}{\sin^2\alpha}}{\sin^4\alpha} =$

$= -3\dfrac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha} + (1+ctg^2\alpha)^3 = -3\dfrac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 + ctg^6\alpha + 3ctg^2\alpha + 3ctg^4\alpha =$

$= 1 + \mathrm{ctg}^6\alpha + 3\mathrm{ctg}^2\alpha\left(1 + ctg^2\alpha - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right) =$

$= 1 + \mathrm{ctg}^6\alpha + 3\mathrm{ctg}^2\alpha\left(\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}\right) = 1 + \mathrm{ctg}^6\alpha$.

91. а) $\overrightarrow{AB}(-6,-8)$, $\overrightarrow{DC}(-6,-8)$;
AB = DC = 10, AB || DC $\Rightarrow$ ABCD — параллелограмм;
BC(8,–6), BC = 10 = AB $\Rightarrow$ ABCD — ромб;
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -48 + 48 = 0$ $\Rightarrow$ ABCD — квадрат;
б) $\overrightarrow{AB}(1,2) = \overrightarrow{DC}(1,2)$ $\Rightarrow$ ABCD — параллелограмм;
в) $\overrightarrow{AB}(1,2) = \overrightarrow{DC}(1,2)$ $\Rightarrow$ ABCD — параллелограмм;
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$, $\overrightarrow{BC}(1,-2)$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5} = |\overrightarrow{AB}|$ $\Rightarrow$ ABCD — ромб;
г) $\overrightarrow{AB}(1,2) = \overrightarrow{DC}(1,2)$ $\Rightarrow$ ABCD — параллелограмм;
$\overrightarrow{BC} = (4,-2)$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 4 - 4 = 0$ $\Rightarrow$ AB $\perp$ BC $\Rightarrow$ ABCD прямоугольник.

92. Окружность задается неоднозначно: $x_0 = 0$ или $x_0 = 4$, $y_0 = 2$, R = 2;
1) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$; 2) $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

93. $x_0 = \dfrac{6-0}{2} = 3$; R = 3 – 0 = 6 – 3 = 3; $y_0 = 0 + 3$, $y_0 = 0 - 3$;
1) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$; 2) $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

94. Искомое геометрическое место точек — серединный перпендикуляр к отрезку $\Rightarrow$ прямая проходит через точку $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$.

Коэффициенты угла наклона серединного перпендикуляра и прямой, содержащей отрезок, связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$; $k_1 \cdot \dfrac{b}{a} = -1$, $k_1 = -\dfrac{a}{b}$;

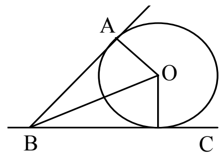
$y=-\frac{a}{b}x+c,\ \frac{b}{2}=-\frac{a}{b}\left(\frac{a}{2}\right)+c;\ \ c=\frac{b}{2}+\frac{a^2}{2b},\ \ y=-\frac{a}{b}x+\frac{b}{2}+\frac{a^2}{2b}.$

95. а) $\begin{cases}5x-7y-20=0\,|\cdot 7\\ 7x=10y+15=0\,|\cdot 5\end{cases};\ \begin{cases}35x-49y=140\\ 35x-50y=-75\end{cases};\ \begin{cases}y_0=215\\ x_0=305\end{cases};$

б) $\begin{cases}2x+3y-7=0\,|\cdot 2\\ 4x+6y+11=0\end{cases};\qquad \begin{cases}4x+6y=14\\ 4x+6y=11\end{cases}$ прямые параллельны;

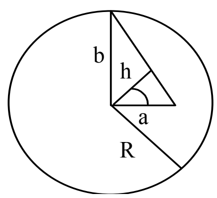
в) $\begin{cases}2x-y=0\\ x+0{,}5y=0\end{cases};\qquad \begin{cases}x_0=0\\ y_0=0\end{cases}.$

96. Расстояние между прямыми d = 2R = 2 · 3 = 6 см.



97. Δ BAO и Δ BCO прямоугольные равнобедренные, $\angle$ ABO= $\angle$ CBO = 45°;
$\angle$ ABC = $\angle$ ABO · $\angle$ CBO = 90°.

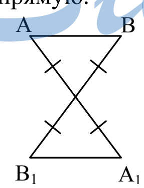
98. R = 4 – 0 = 4>2 $\Rightarrow$ окружность пересекает Оy в двух точках.
99. R = 5 – 0 = 5>3 $\Rightarrow$ окружность пересекает Оx в двух точках.



100. а) Найдем высоту h, опущенную на гипотенузу c = $\sqrt{a^2+b^2}$;
$\frac{h}{a}=\frac{b}{c}.\quad h=\frac{ab}{c}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{3\cdot 4}{5}$ = 2,4<R = 2,5 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ окружность пересекает прямую в двух точках;

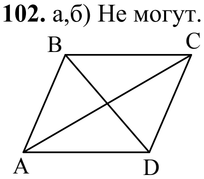
б) h = $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{20\cdot 15}{25}$ = 12 = R $\Rightarrow$ окружность касается прямой;

в) h = $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{5\cdot 12}{\sqrt{25+144}}=\frac{5\cdot 12}{13}=\frac{60}{13}>4$ $\Rightarrow$ окружность не пересекает прямую.



101. а) относительно точки симметрии быть не может.
Δ ABO = Δ A_1B_1O по углу $\angle$ A_1OB_1 = $\angle$ AOB и двум сторонам A_1O = AO, BO = OB_1 $\Rightarrow$ AB = A_1B_1, но это не так.
б) симметрии относительно прямой также не может быть, т.к. симметрия относительно прямой — движение, а движение сохраняет расстояние.

102. а,б) Не могут. Основания различны по длине. Смотри задачу 101.



103. При симметрии относительно точки вершина может перейти только в противоположную. Значит, диагонали центом симметрии и точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ четырехугольник параллелограмм.

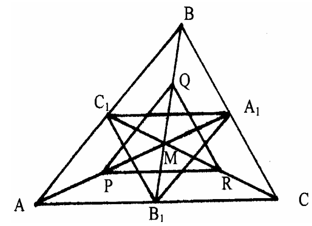
104. Такого движения не существует. Т.к. прямые, в которые перейдут прямые a_1 и b_1, как и прямые a_1 и b_1, имеют общую точку.

105. Если предположить обратное, то есть параллельные прямые переходят в пересекающиеся получим противоречие с задачей 104. $\Rightarrow$ параллельные прямые переходят в параллельные.

106. а) не могут в силу задачи 101.

б) не могут в силу 105.

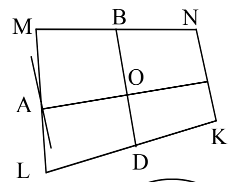
107. Т.к. медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2:1 от вершины, то $AP = PM = MA_1$; $BQ = QM = MB_1$, $CR = RM = MC_1$.



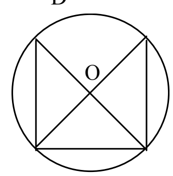
Равенство $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta PQR$ следует из равенства треугольников их составляющих. Например,

$\Delta PQM = \Delta A_1B_1M$ по первому признаку ($\angle PMQ = \angle A_1MB_1$, Δ $PM = MA$, $QM = M$).

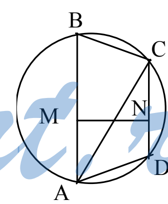
108. Пусть на четырехугольнике LMNK известны B и D, O — середина BD. Построим $N'K'$ симметрично NK относительно O. $N'K' \cap ML = A$. C симметрична A относительно O.



109. Центр окружности лежит на середине гипотенузы данного прямоугольного треугольника, т.к. прямой угол с вершиной на окружности опирается на диаметр. Четвертая вершина симметрична вершине при прямом угле относительно центра окружности $\Rightarrow$ лежит на окружности



110. Пусть $AB \parallel CD$, MN — ось симметрии трапеции ABCD и окружности $\Rightarrow$ она проходит через ее центр $MN \perp AB$ и $MN \perp CD$, по свойству симметрии.

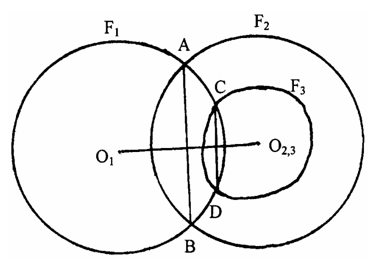


111. Соединим центры $O_{3,2}$ и O_1 окружностей F_2, F_3 и F_1.

Отрезки AB и CD симметричны относительно

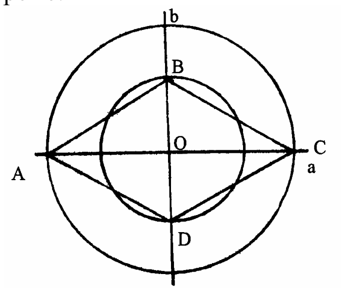
$O_1O_2 \Rightarrow AB \perp O_1O_2$,

$CD \perp O_1O_2 \Rightarrow AB \parallel CD$.

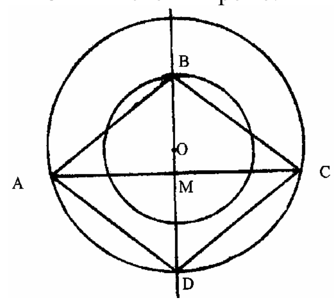


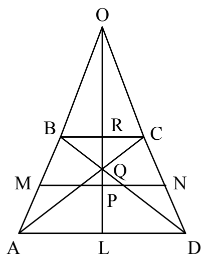
112.

а) Построим a, b, проходящие через O так, что $a \perp b$, a пересекает I окружность в точках A и C, b пересекает II окружность в точках B и D. ABCD — искомый ромб.

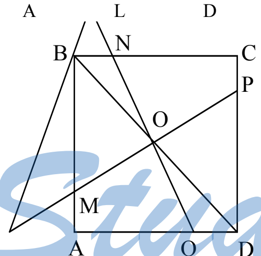


б) Прямая b проходит через центр, b пересекает I окружность в точке B, M — середина BD, $a \perp b$ проходит через M, а пересекает I окружность в точках A и C, ABCD — искомый ромб.

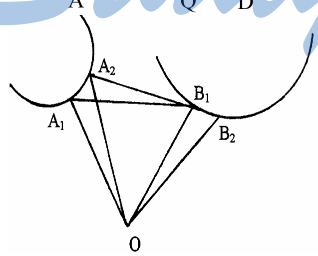




113. L — середина AD, R — середина BC, $AC \cap BD = Q$, $AB \cap CD = O$, RL — ось симметрии трапеции содержит точки O, P,Q.

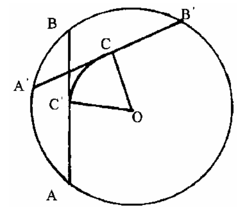


114. Повернем точку M вокруг O на 90° так, чтобы получилась прямая BC, повернем прямую BC на 90° вокруг O до получения прямой CD, аналогично, получим прямые AD и AB, которые пересекая BC и CD дают квадрат ABCD.

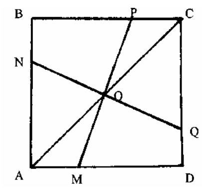


115. Строим окружность F_1' поворотом F_1 на 60° вокруг O, чтобы окружности F_1' и F_2 пересеклись в двух точках A_1 и A_2 (возможно совпадающих), строим F_2' поворотом вокруг O, чтобы F_2' и F_1 пересеклись в B_1 и B_2 (возможно совпадающих) ΔA_1B_1O и ΔA_2B_2O — искомые.

116. Мы всегда можем построить хорду AB данной длины. Чтобы построить хорду, проходящую через данную точку C, повернем точку C вокруг O так, чтобы C' оказалась на AB. Поворачиваем хорду AB вокруг O на $\angle C'OC$, тогда хорда AB перейдет в A_1B_1, а C' на AB перейдет в C на A_1B_1, $A_1B_1 = AB$.



117. Т.к. центр квадрата — центр симметрии $\Delta OAM = \Delta OCP$ по стороне и двум прилегающим углам $\Rightarrow$ OM = OP. При повороте на 90° вокруг O точка M перейдет в N $\Rightarrow$ OM = ON и т.д.



118. а) $\begin{cases} x^1 = 0+4 \\ y^1 = 0+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^1 = 4 \\ y^1 = 3 \end{cases} \Rightarrow O^1(4;3)$; $\begin{cases} x^1 = 2+4 \\ y^1 = 3+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^1 = 6 \\ y^1 = 6 \end{cases} \Rightarrow A^1(6;6)$;

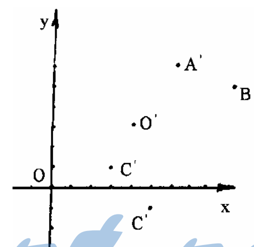
$\begin{cases} x^1 = 5+4 \\ y^1 = 2+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^1 = 9 \\ y^1 = 5 \end{cases} \Rightarrow B^1(9;5)$; $\begin{cases} x^1 = -1+4 \\ y^1 = -2+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^1 = 3 \\ y^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C^1(3;1)$;

$\begin{cases} x^1 = 1+4 \\ y^1 = -4+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^1 = 5 \\ y^1 = -1 \end{cases} \Rightarrow D^1(5;-1)$;

б) $\begin{cases} 1 = x+4 \\ -2 = y+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow$ E(–3, –5);

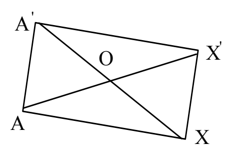
$\begin{cases} 1 = x+4 \\ 1 = y+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow$ F(-3,-2);

$\begin{cases} -2 = x+4 \\ -1 = y+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow$ G(-6,-4).



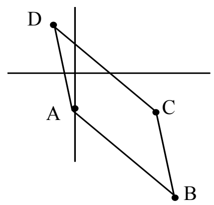
119. Не существует, т.к. параллельный перенос сохраняет расстояния.
120. а) не существует; б) не существует.

121. Соединим точки A' и X отрезком и найдем его середину O. Проведем прямую AO и отложим на луче, дополнительному к лучу OA отрезок $OX' = OA$. Построенная точка X' — искомая. Решение единственно.



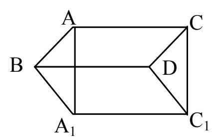
122. При параллельном переносе сохраняются параллельность прямых, расстояние между точками и углы между полупрямыми, т.е. параллельный перенос обладает всеми свойствами движения.
123. $AB \parallel A_1B_1$ и $AB = A_1B_1 \Rightarrow ABB_1A_1$ — параллелограмм.

124. а) $\overrightarrow{AB}$ (3,–3), $\overrightarrow{AC}$ (2,0); $\overrightarrow{AD}$ (–1,3), $\overrightarrow{BC}$ = $\overrightarrow{AD}$ = (–1,3);
$\overrightarrow{BD}$ (–4,6), $\overrightarrow{CB}$ (–3,3); $\overrightarrow{BA}$ (–3,3), $\overrightarrow{CA}$ (–2,0); $\overrightarrow{DA}$ (1,–3), $\overrightarrow{CB}$ (1,–3);



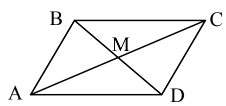
$\overrightarrow{DB}$ (4,–6), $\overrightarrow{DC}$ (3,–3);
б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
ABCD — параллелограмм.

125. $\vec{a}$ (2,–3); а) B(2 – 0,–3 – 0) = (2,–3); б) B(2,–6);
в) B(1,–3); г) B(2 + 3,4 – 3) = (5,1).



126. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{CC_1}$.

127. Смотри Д-14 (1).

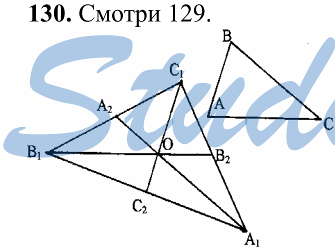


128. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) + \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right) = 0.$

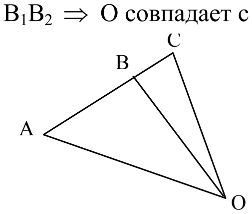
129. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C}\right) =$

$$= \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})\right) = 0.$$

130. Смотри 129.

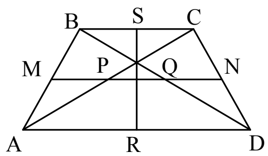


131. Для $\Delta A_1B_1C_1$ выполняется $OA_1 + OB_1 + OC_1 = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 0$;
$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = -\overrightarrow{OC_1}$;
$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = 2\overrightarrow{OC_2}$, C_2 — середина A_1B_1 $\Rightarrow$
$2\overrightarrow{OC_2} = -\overrightarrow{OC_1}$ $\Rightarrow$ O принадлежит медиане C_1C_2. Аналогично, O принадлежит A_2A_1 и B_1B_2 $\Rightarrow$ O совпадает с точкой пересечения медиан.



132. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$;
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.

133. Точки M, N, P, Q, R, S — середины отрезков AB, CD, AC, BD, AD, BC, соответственно;



$OM = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$; $ON = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$;

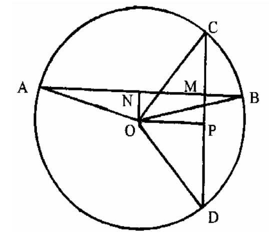
G_1 — середина MN; $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$;

G_2, G_3 — середины PQ и RS. Аналогично,

$\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) \Rightarrow G_1, G_2, G_3$ — совпадают.

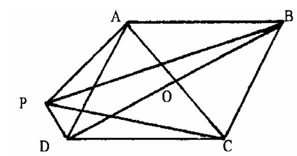
134. Построим прямоугольник ONMP со сторонами на хордах. N и P середины AB и CD (Δ AOB и Δ COD — равнобедренные). ON и OP — медианы и высоты.

По задаче 127



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) + $$
$$+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

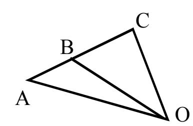
135. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD} =$



$= \left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)+\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right) =$

$= 2\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PO} = 4\overrightarrow{PO}.$

136. $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$;

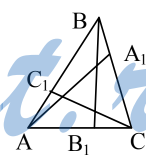


$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{\lambda+1}$;

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \frac{\overrightarrow{OB}}{\lambda+1} + \frac{\overrightarrow{OA}}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OB} + \frac{\overrightarrow{OA}}{\lambda+1}.$$

137. $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{CA}$;

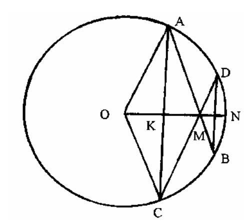


$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1} = (1+k)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right) = 0.$

138. $\cup$AB = $\cup$DC $\Rightarrow$ AD = BC;



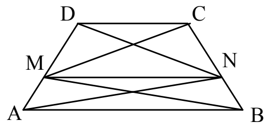
$\angle$ACD и $\angle$CDB опираются на равные дуги $\Rightarrow$ $\angle$ACD= $\angle$CDB $\Rightarrow$ ADBC — равнобокая трапеция;

$\overrightarrow{OM}$ — ось симметрии;

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{OK}-\overrightarrow{KA}$;

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{ON}+\overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{ON}-\overrightarrow{NB}$;

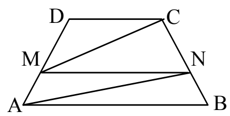
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OK}+2\overrightarrow{ON}$, т.е. $\overrightarrow{OA}$ коллинеарен $\overrightarrow{OM}$.



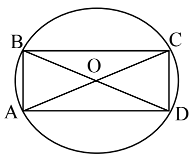
139. AN || CM; $\angle$CMN = $\angle$MNA как накрест лежащие;
$\angle$CMN = $\angle$MNA = $\angle$DCM = $\angle$NAB (по той же причине).
Аналогично $\angle$CDN = $\angle$DNM
и $\angle$ABM = $\angle$BMN (*).
$\angle$DMC = $\angle$DAN как соответственные. ΔDMC~ΔMAN (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{MN}{DC}$, $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ по теореме Фалеса. Значит,

ΔMNB~ΔDCN ($\frac{MN}{DC}=\frac{BN}{NC}$, $\angle$MNB=$\angle$DCN) $\Rightarrow$ $\angle$CDN=$\angle$NMB.

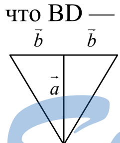
Учитывая (*) получим, $\angle$CDN = $\angle$NMB = $\angle$MBA=$\angle$NDC, т.е. $\angle$DNM=$\angle$NMB $\Rightarrow$ $\Rightarrow$DN || MB.



140. Если бы AN было параллельно MC, то по предыдущей задаче ΔAMN~ΔMDC, но $\frac{1}{2}=\frac{AM}{MD}\neq\frac{MN}{DC}$ $\Rightarrow$ наше предположение неверно, т.е. AN не параллельно MC.



141. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}$. Пусть $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OF}$.
Из условия задачи $\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OF}$ $\Rightarrow$ точки E и F лежат на одной прямой и OE = OF. Т.к. OE и OF являются диагоналями ромбов OAEB и OCFD, то Δ OAE = ΔOCF (по трем сторонам). Значит, $\angle$EOA = $\angle$FOC. А поскольку точки O, E, F лежат на одной прямой, то AC диаметр. Аналогично доказывается, что BD — тоже диаметр $\Rightarrow$ ABCD — прямоугольник.



142. Отложив от одной точки вектора $\vec{a},\vec{b},-\vec{b}$ получим два прямоугольных треугольника с равными гипотенузами $|\vec{a}-\vec{b}|$ и $|\vec{a}+\vec{b}|$

143. $|2\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}+2\vec{b}|$
Возведем обе части в квадрат $(2\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}+2\vec{b})$;
$4|a|^2+|b|^2+4|a||b|\cos\alpha=|a|^2+4|b|^2+4|a||b|\cos\alpha$; $3|a|^2=3|b|^2 \Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|$.

144. а) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=13$, $(\vec{a},\vec{b})=15-48=-33$; $\cos\alpha=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{33}{65}$;

б) $|\vec{c}|=17$, $|\vec{d}|=10$, $(\vec{c},\vec{d})=64-90=-26$; $\cos\alpha=\frac{(\vec{c},\vec{d})}{17\cdot 10}=-\frac{13}{85}$;

в) $|\vec{m}|=2\sqrt{10}$, $|\vec{n}|=3\sqrt{10}$, $(\vec{m},\vec{n})=54-6=48$;

$\cos\alpha=\frac{48}{2\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}}=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$.

145. $\overrightarrow{AB}\,(-4\sqrt{3}\,,4)$, $\overrightarrow{AC}\,(4\sqrt{3}\,,4)$;

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{48+16} = 8 = \left|\overrightarrow{AC}\right|$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -48 + 16 = -32$;

$\cos A = \dfrac{-32}{8\cdot 8} = -\dfrac{1}{2}$, $\angle A = 120^\circ$; $\angle B = \angle C = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

146. $\overrightarrow{AB}\,(1,7) = \overrightarrow{DC}\,(1,7) \Rightarrow$ ABCD — параллелограмм;

$\overrightarrow{BC}\,(-7,1)$, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{50}$, ABCD — ромб;

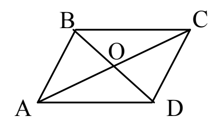
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -7 + 7 = 0 \Rightarrow \angle B = 90^\circ \Rightarrow$ ABCD — квадрат.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К-1. *Вариант 1*

1. а) AO = OC, BO = OD по свойству параллелограмма

$\angle$ AOB = $\angle$ COD как вертикальные $\Rightarrow$ Δ AOB = Δ COD.



б) AO = 5 см, BO = 3 см;

P(ABO) = AB + BO + OA = 5 + 5 + 3 = 13 см.

2. $\angle$ BAD = 45°, BH = 4 см, AH = HD, Δ AHB = Δ DHB — прямоугольные равнобедренные $\Rightarrow$ AB = BD= $\sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ см;

AD = AH + HD = 2BH = 8 см.

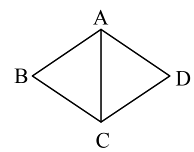
К-1. *Вариант 2*

1. AB = CD;

$\angle$ BAC = $\angle$ ACD $\Rightarrow$ AB $\parallel$ CD $\Rightarrow$ $\angle$ CAD = 40^0,

$\angle$ ACD = 30^0 $\Rightarrow$ $\angle$ BAD = $\angle$ BCD = 70^0;

$\angle$ B = $\angle$ D = $180^0 - 70^0 = 110^0$.

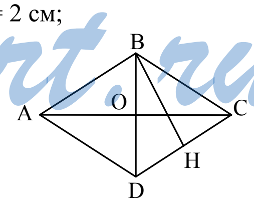


2. $\angle$ BCD = $\angle$NDC = 60^0 $\Rightarrow$ DH = HC = 2 см, DC = 2 см;

P(ABCD) = 4 · 4 = 16 см;

Δ BDC — равносторонний $\Rightarrow$ BD = DC = 4 см,

BH — высота и биссектриса.

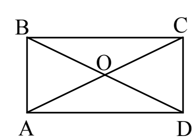


К-1. *Вариант 3*

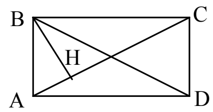
1. а) AC = BD $\Rightarrow$ BO = AO = $\dfrac{1}{2}$ AC;

б) Из прямоугольного Δ ABO;

AO = $\sqrt{5^2 - 4^2}$ = 3 см; AO = BO = $\dfrac{1}{2}$ BD = 2,5 см;



P(ABO) = AB + AO + BD = 4 + 2,5 + 2,5 = 9 см.



2. В прямоугольном Δ AHB, AB = 2AH = 4 см;

Δ AHB~Δ ABC $\Rightarrow \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$;

BC = $\dfrac{AB^2}{AH} = \dfrac{16}{2}$ = 8 см; В Δ ABC, $\angle$BAC = 60°;

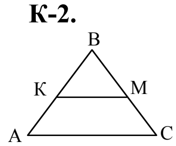
Δ FDC = Δ BAD $\Rightarrow$ $\angle$ABD = 60° $\Rightarrow$ BH — биссектриса.

К-1. *Вариант 4*

1. AB = BD = AD $\Rightarrow$ Δ ABD — равносторонний, BD = 2BO= 8 см, P(ABCD) = 4AB = 4BD = 32 см.

2. Δ BDC — равнобедренный, т.к. высота и медиана совпадают, но BD = BC =DC$\Rightarrow$$\Delta$ BDC — равносторонний $\Rightarrow$$\angle$A=$\angle$C = 60°, $\angle$ABC = $\angle$ADC = 120°; BD = $\dfrac{P}{4}$ = 4 см. Т.к. BCD — равносторонний, то BH — биссектриса, медиана и высота.

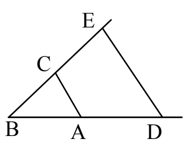
К-2. *Вариант 1*



1. а) AB = 2KB,
AK = 2KM, BC = 2BM;
P(ABC) = 2P(KBM);

б) AB = 6 см, P(ABC) = 18 см; P(BMN) = $\dfrac{P(ABC)}{2}$ = 9 см.

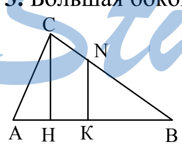
2. BA:AD = 3:4; BC = 1,2 см; BE = 2,8 см.



Предположим, что AC || DE, тогда Δ ACB~Δ DEB (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BA}{BD}$;

$\dfrac{1{,}2}{2{,}8} = \dfrac{3}{7}$ тождество $\Rightarrow$ AC || DE.

3. Большая боковая сторона CB, т.к. ее проекция больше.

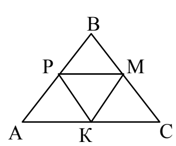


K — середина AB; BK = $\dfrac{15+27}{2}$ = 21 см;

Δ BHC~Δ BKN$\Rightarrow \dfrac{BK}{BH} = \dfrac{BN}{BC}$,

BN = $\dfrac{BK \cdot BC}{BH} = \dfrac{21 \cdot 45}{27} = \dfrac{7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5}{27}$ = 35 см; $\Rightarrow$ CN = BC – BN=45–35 = 10см.

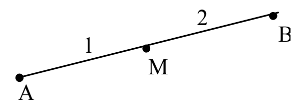
К-2. *Вариант 2*



1. а) Т.к. PM, MK и KP — средние линии Δ ABC,
то 2 PM = AC, 2KM = AB,
2KP = BC $\Rightarrow$ 2P(PMK) = P(ABC);
б) PM = 4 см, MK = 5 см, MP = 6 см;
P(PMK) = 4 + 5 + 6 = 15 см;

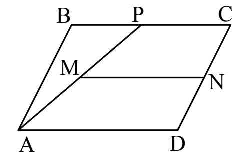
P(ABC) = 2P(PMK) = 30 см;
AM:MB = 1:2.

2. AM:AB = AM:(AM + MB) = $\frac{1}{3}$;



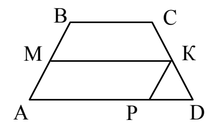
MB:AB = MB:(AM + MB) = $\frac{2}{3}$.

3. MN = 6 см — средняя линия;
PC = 2MN – AD = 12 – 10 = 2 см;
BP = AD – PC = 10 – 2 = 8 см;
Δ ABP — равнобедренный;
($\angle$ BAP = $\angle$ PAD = $\angle$ BPA) $\Rightarrow$ BA = BP = 8 см;
P(ABCD) = 2BA + 2AD = 2(8 + 10) = 36 см.



К-2. *Вариант 3*

1. а) AM || PC;
MK || AP;
AMPK — параллелограмм.

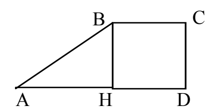


б) AB = 4 см, C = 5 см, AD = 7 см;

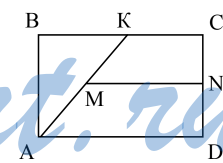
MK = $\frac{1}{2}$(AD + BC) = $\frac{1}{2}$(7 + 5) = 6 см;

AM = $\frac{1}{2}$AB = 2 см, P(AMKP) = 2MK + 2AM = 12 + 4 = 16 см.

2. $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$; BH — высота. В прямоугольном Δ AHB, AB = 2BH $\Rightarrow$ $\angle$ A = 30°. Наибольший $\angle$ ABC = 180° – $\angle$ A = 150°.



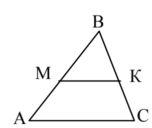
3. $\angle$ BAK = $\angle$ KAD = $\angle$ AKB $\Rightarrow$ Δ ABK — прямоугольный равнобедренный $\Rightarrow$ BK = AB = 6 см;
KC = BC – BK = 10 – 6 = 4 см.
MN — средняя линия трапеции
MN = $\frac{1}{2}$(AD + KC)= $\frac{1}{2}$(10 + 4) = 7 см.

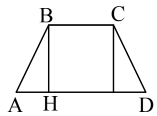


К-2. *Вариант 4*

1. а) AB = BC = 8 см; AM = $\frac{1}{2}$AB = KC = MK = 4 см.

MK || AC $\Rightarrow$ AMKC — равнобокая трапеция
б) P(AMKC) = AM + MK + KC + AC =
= 4 + 4 + 4 + 8 = 20 см.





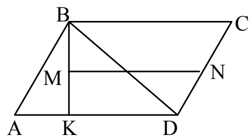
2. $AB = BC = CD = a$; Δ AHB — прямоугольный;

$\angle ABH = 30^\circ$; $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

$AD = 2AH + BC = a + a = 2a$;

$P(ABCD) = AB + BC + CD + AD = a + a + a + 2a = 5a$.

3. Δ ABD — равнобедренный, BK — высота и медиана,

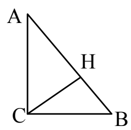


$AK = KD = \frac{AD}{2} = 10$ см, $BC = AD = 20$ см.

В трапеции KBCD MN — средняя линия,

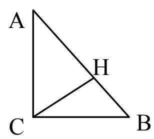
$MN = \frac{1}{2}(KD + BC) = \frac{1}{2}(10 + 20) = 15$ см.

К-3. *Вариант 1*



1. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$ см.

2. $AC = \frac{CB}{tg30^\circ} = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3\sqrt{3}$ см.

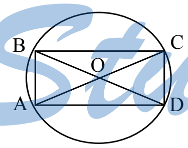


3. $\Delta CHB \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{CB}{CH} = \frac{AB}{AC}$;

$CH = \frac{CB \cdot AC}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{\sqrt{36 + 64}} = 4{,}8$ см.

К-3. *Вариант 2*

1. $d_1 = d_2 = \sqrt{144 + 25} = 13$ см.

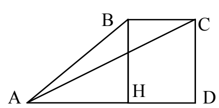


2. $\frac{AD}{BA} = \frac{15}{8}$; $AB = \frac{8AD}{15}$;

$4 \cdot 289 = (2R)^2 = AD^2 + AB^2 = AD^2 + \frac{64}{225}AD^2$;

$\frac{289}{225}AD^2 = 4 \cdot 289$; $AD^2 = 4 \cdot 225$;

$AD = 30$ см $\Rightarrow$ $AB = 16$ см.



3. $AH = AD - BC = a$, $AB = b$, $AC = c$;

$AC \cap BH = M$

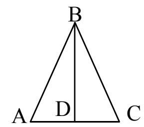
В ΔACD, $CD = BH = \sqrt{b^2 - a^2}$;

$AD = \sqrt{c^2 - b^2 + a^2} \Rightarrow BC = AD - a = \sqrt{c^2 - b^2 + a^2} - a$.

К-3. *Вариант 3*

1. BD — высота и медиана $\Rightarrow$ AD = DC = $\dfrac{AC}{2}$ = 6 см.

Из прямоугольного Δ ADB,

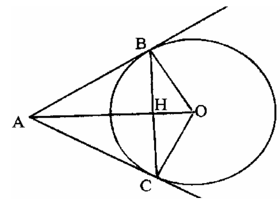


AB = $\sqrt{AD^2 + DB^2} = \sqrt{36 + 64}$ = 10 см.

2. AB = BC = AC – 1,5; P(ABC) = 24 дм;
P(ABC) = 2AC – 3 + AC = 24 дм; AC = 9 дм; AB = BC = 7,5 дм;

BD = $\sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{(7{,}5)^2 - (4{,}5)^2} = \sqrt{\dfrac{13^2}{4} - \dfrac{9^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{144}}{2}$ = 6 дм.

3. Пусть AB и AC — касательные. Соединим с центром O круга точки A, B и C отрезками. Δ ABO и Δ AHB — прямоугольные подобные причем BH = 60 дм;



AH $= \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(156)^2 - (60)^2} = \sqrt{216 \cdot 96} =$

$= 9 \cdot 8 \cdot 2 = 144$ дм; $\dfrac{AB}{BO} = \dfrac{AH}{HB}$;

BO = $\dfrac{HB \cdot AB}{AH} = \dfrac{60 \cdot 156}{144}$ = 65 дм;

К-3. *Вариант 4*

1. $a = \sqrt{\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2}$ = 13 см.

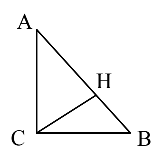
2. BD = 14 дм, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{48}{25}$, AB = BC; AD = $\dfrac{1}{2}$ AC = $\dfrac{24}{25}$ AB;

$AD^2 + BD^2 = AB^2$;

$\dfrac{576}{625}AB^2 + 196 = AB^2$; $\left(\dfrac{7}{25}\right)^2 AB^2 = 196$;

AB = $\dfrac{14}{7} \cdot 25$ = BC = 50 дм; AD = 48 дм, AC = 2AD = 96 дм.

3. AC = 15 см, HB = 16 см. Пусть CB = x



$\dfrac{HC}{HB} = \dfrac{AC}{CB}$ и CB = $\sqrt{CH^2 + 256}$;

HC = $\dfrac{AC \cdot HB}{CB} = \dfrac{15 \cdot 16}{\sqrt{CH^2 + 256}}$;

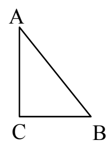
HC $\sqrt{HC^2 + 256}$ = 15 · 16; $HC^2\ (HC^2 + 256) = 225 \cdot 256$;
$HC^2 + 256 \cdot HC^2 - 225 \cdot 256 = 0$;
$D_2 = 256 \cdot 256 + 4 \cdot 225 \cdot 256 = 256(256 + 900) = 256 \cdot 1156 = 16^2 \cdot 2^2 \cdot 17^2$;

$HC^2 = \frac{-256 + 2 \cdot 16 \cdot 17}{2} = 8(34 - 16) = 8 \cdot 18 = 16 \cdot 9$;

HC = 12 см $\Rightarrow$ CB $= \sqrt{CH^2 + HB^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$ см;

AB $= \sqrt{CA^2 + CB^2} = \sqrt{225 + 400} = 25$ см;
P(ABC) = AB + BC + AC = 25 + 20 + 15 = 60 см.

К-4. *Вариант 1*



1. Т.к. катет равен половине гипотенузы, то $\angle$ B = 30°, $\angle$ A = 60°, CB $= \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5\sqrt{3}$ см.

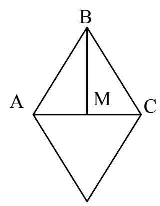
2. AB = 8 см, BC = 12 см; tg $\angle$ ACB $= \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$.

В описанной окружности $\angle$ BOA — центральный, а $\angle$ ACB — вписанный, опираются на дугу AB $\Rightarrow$ $\angle$ AOB = 2 $\angle$ ACB;

AC $= \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$ см;

sin $\angle$ ACB $= \frac{AB}{AC} = \frac{8}{4\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$;

cos $\angle$ AOB = 1 – 2sin^2 $\angle$ ACB = 1 – $\frac{8}{13} = \frac{5}{13}$; $\angle$ AOB = arccos $\frac{5}{13}$.

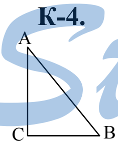


3. В Δ ABC, BM — медиана. Достроим Δ ABC до параллелограмма ABCD';

BD' < AB + AD' = AB + BC.

Поделив на 2 получим BM < $\frac{1}{2}$ (AB + BC).

К-4. *Вариант 2*



1. AC = CB; $\angle$ C = 90°, AB = $3\sqrt{2}$ см;
$AB^2 = AC^2 \cdot 2 = 18$; AC = CB = 3 см;
$\angle$ A = $\angle$ B = 45°.

2. AB = AC + 1, CB = 9 см, $AB^2 = AC^2 + CB^2$;
$AC^2 + 2AC + 1 = AC^2 + 81$, AC = 40 см, AB = 41 см;

sinA $= \frac{CB}{AB} = \frac{9}{41}$; $\angle$ A = arcsin $\frac{9}{41} \approx 12^\circ 41'$

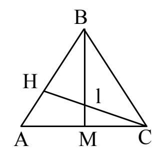
3. Используя К-4 Вариант 1(3) получим $AA_1 < \frac{1}{2}$ (AB + AC);

$BB_1 < \frac{1}{2}$ (BA + BC); $CC_1 < \frac{1}{2}$ (CA + CB);

$AA_1 + BB_1 + CC_1 <$ AB + BC + AC.

К-4. *Вариант 3*

1. $\angle C = 90^\circ$, AC = 8 см, $\angle A = 54^\circ$;

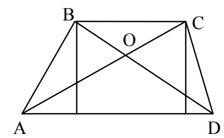


$CB = AC \cdot tg54^\circ \approx 11$ см; $AB = \dfrac{AC}{\cos 54^\circ} \approx 13{,}6$ см.

2. AB = BC, $\angle B = \alpha$; CH — высота, CH = l;

$BC = \dfrac{l}{\sin\alpha}$ (из Δ BHC); $AC^2 = 2BC^2 - 2BC^2\cos\alpha = \dfrac{2l^2}{\sin^2\alpha} - \dfrac{2l^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$;

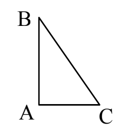
$AC = \dfrac{l}{\sin\alpha}\sqrt{1-\cos\alpha}$ из Δ ABC.



3. Пусть $AC \cap BD = 0$.
Из Δ AOD и Δ BOC имеем:
AO + OD>AD; BO + OC>DC;
(AO + OC) + (BO + OD) = AC + BD>AD + BC.

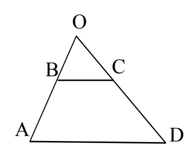
К-4. *Вариант 4*

1. $\angle C = 90^\circ$, AB = 8 см, $\angle A = 40^\circ$;



$AC = AB \cdot \cos40^\circ \approx 6{,}1$ см; $CB = AB \cdot \sin40^\circ \approx 5{,}1$ см;
$\angle B = 90^\circ - \angle A = 50^\circ$.

2. $\angle BAD = 28^\circ$, BC = 8 см, AD = 12 см. Пусть $AB \cap CD = O$;
$\angle OBC = \angle OAD = 28^\circ$ (как соответственные).



Из Δ OBC, $OB = BC \cdot \cos28^\circ = 8 \cdot \cos28^\circ$;
$\Delta OBC \sim \Delta OAD$ (по двум углам); $\dfrac{OB}{BC} = \dfrac{OA}{AD}$;

$OA = \dfrac{OB \cdot AD}{BC} = \dfrac{8 \cdot \cos 28^\circ \cdot 12}{8} = 12\cos28^\circ$;

$BA = OA - OB = 4\cos28^\circ \approx 3{,}53$ см.

3. Воспользуемся неравенством треугольника AB<AC+BC. Преобразуем его $\frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC$, $AB - \frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}(AC + BC)$,

$AB < \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$.

К-5. *Вариант 1*

1. а) $O \in BD$, BO = OD, $O\left(\dfrac{6+0}{2}; \dfrac{0+8}{2}\right) = (3{,}4)$;

б) $OB = \sqrt{9+16} = 5$;
в) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

2. $\overrightarrow{AB}\,(6,0) = \overrightarrow{DC}$;

а) C(0 + 6, 8 + 0) = (6,8),

б) $\overrightarrow{AD}$ (0,8), P(ABCD) = 2AB + 2AD = $2\sqrt{36} + 2\cdot\sqrt{64} = 28$.

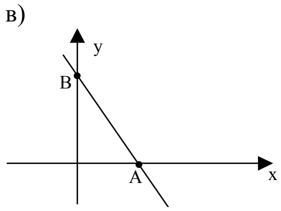
К-5. *Вариант 2*

1. а) A(x,0), $4x + 3\cdot 0 = 6$, $x = \frac{3}{2}$;

$A\left(\frac{3}{2},0\right)$, B(0,$y$), $3y = 6$, $y = 2$, B(0,2); $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{3}{2},2\right)$;

б) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \frac{5}{2}$.

в)



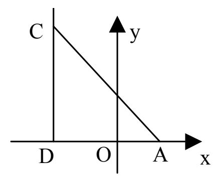
2. $b : a$ = const;

$c \in b \Rightarrow x = -1{,}5$;

D(–1,5;0), C(–1,5;4);

DC = 4, DA = 3 $\Rightarrow$ CA = 5;

P(ACD) = 3 + 4 + 5 = 12.



К-5. *Вариант 3*

1. а) O $\in$ AC, AO = OC, $O\left(\frac{2-2}{2},\frac{8+4}{2}\right) = (0,6)$;

б) $\overrightarrow{AB} = (-4,8)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$;

$\overrightarrow{BC}$ (8,–4), $|\overrightarrow{BC}| = 4\sqrt{5}$; $\overrightarrow{AB} = (-4,8) = \overrightarrow{DC}$;

в) C(2,8), D(2 + 4,8 – 8), D(6,0).

2. $\overrightarrow{AC}$ (4,4), $k = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow$ AC: $y = x + c$, A $\in$ AC $\Rightarrow$ $4 = -2 + c$;

$c = 6$, $y = x + 6$. BD: $\overrightarrow{BD}$ (12,–12), $k = \frac{-12}{12} = -1 \Rightarrow$ y = –x + c, B $\in$ BD $\Rightarrow$ 12 = 6 + c; C = 6 $\Rightarrow$ y = –x + 6.

К-5. *Вариант 4*

1. $\overrightarrow{AB}$ — диаметр, O $\in$ AB;

а) AO = OB, $O\left(\frac{-7-1}{2},\frac{7-1}{2}\right) = (-4,3)$;

б) $\overrightarrow{OB} = (3,-4)$, $|\overrightarrow{OB}| = R = \sqrt{9+16} = 5$;

в) уравнение окружности $(x + 4)^2 + (y – 3)^2 = 25$;

уравнение прямой AB: $\overrightarrow{OB} = (3,–4)$; $k = \frac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}$;

$y = \frac{-4}{3}x + c$; $O \in AB \Rightarrow -4 = -4 + c$; $C = 0$. Значит, $3y = -4x$.

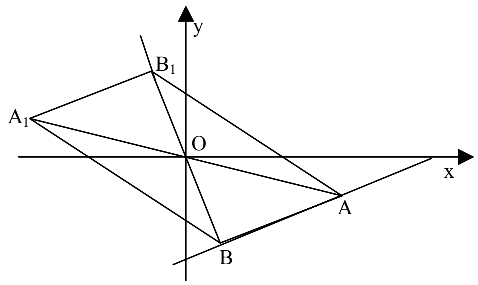
2. $\overrightarrow{CA}(-8,5) = \overrightarrow{BD}$, $B(-1,-1) \Rightarrow D = (-9,4)$;

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{64+25} = \sqrt{89}$; $\overrightarrow{CB}(-2,-3)$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$;

$P(ABCD) = 2CA + 2CB = 2\sqrt{89} + 2\sqrt{13}$.

К-6. *Вариант 1*

1. Т.к. симметрия относительно O задается формулами $x' = -x$, $y' = -y$, то $A_1(-3,1)$, $B_1(-1,2)$.



2. В задачнике, вероятно, опечатка. Вместо “В переходит в С” следует читать “В переходит в A_1”.

3. Да, такой параллельный перенос существует и задается формулами.

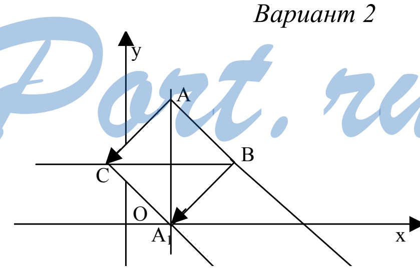
4. $x' = x - 4$, $y' = y + 2$.

5. $\overrightarrow{BA}(2,1)$, $B_1(-1,2)$, $A_1(-3,1)$;

$\overrightarrow{A_1B_1} = (2,1) = \overrightarrow{BA} \Rightarrow ABA_1B_1$ — параллелограмм.

К-6. *Вариант 2*

1. Симметрия относительно CB задается формулами $x' = x$, $y' = -y + 2$; $A_1(1,0)$.



2. Да, такой параллельный перенос существует, т.к. $AC = BA_1$ и $AC \parallel BA_1$.

3. $x' = x - 2$, $y' = y - 2$.

4. Направляющие векторы $\overrightarrow{AB}(2,-2)$ и $\overrightarrow{CA_1}(2,-2)$ сонаправлены.

5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA_1} \Rightarrow ABA_1C$ — параллелограмм;

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC}(-2,-2)$;

$|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2} = |\overrightarrow{AB}| \Rightarrow$ ABA_1C — ромб;

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -4 + 4 = 0 \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow$ ABA_1C — квадрат.

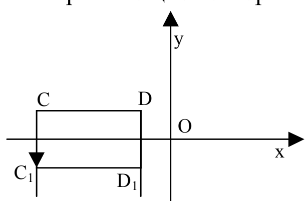
К-6. *Вариант 3*

1. Симметрия относительно Ox задается формулами $x' = x$, $y' = -y$, $C_1(-4,-1)$, $D_1(1,-1)$.

2. Да, существует ($\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{DD_1}$).

3. $x' = x - 2$, $y' = y - 2$.

4. Направляющие векторы полупрямых равны.

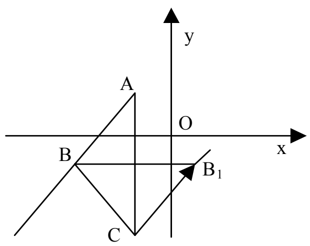


5. $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1} \Rightarrow$ CC_1D_1D — параллелограмм;

$\overrightarrow{CC_1} = (0,-2)$, $\overrightarrow{CD} = (3,0)$;

$\overrightarrow{CC_1}$ $(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{CD}) = 0\cdot 3 - 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow CC_1 \perp CD \Rightarrow$ CC_1D_1D — прямоугольник.

К-6. *Вариант 4*



1. Симметрия относительно AC задается формулами
$x' = -x - 1$, $y' = y$; $B_1(1,-2)$.

2. Да, существует, ведь $\overrightarrow{BA}(2,3) = \overrightarrow{CB_1}$.

3. $x' = x + 2$, $y' = y + 3$.

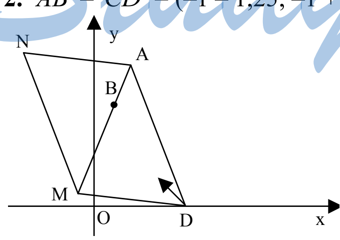
4. $\overrightarrow{AB}(-2,-3) = -\overrightarrow{CB_1} \Rightarrow$ лучи противоположно направлены.

5. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB_1} \Rightarrow$ $ABCB_1$ — параллелограмм; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,
$\overrightarrow{CB}(-2,3)$; $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$; $|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AB}| \Rightarrow$ $ABCB_1$ — ромб.

К-7. *Вариант 1*

1. $\overrightarrow{AB} = (1-2, 3-4) = (-1,-1)$; $\overrightarrow{CD} = (3-1{,}75; 0-1{,}25) = (1{,}25; -1{,}25)$.

2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-1-1{,}25; -1+1{,}25) = (-2{,}25; 0{,}25)$.



3. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -1{,}25 + 1{,}25 = 0$.

Т.к. $\cos \widehat{\vec{AB}\ \vec{CD}} = 0$, то $\widehat{\vec{AB}\ \vec{CD}} = 90^\circ$.

4. $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = 4\overrightarrow{DL}$;
$\overrightarrow{AM}(-3,-3)$; $M(-1,1)$; $\overrightarrow{DN}(-5,5)$; $N(-2,5)$.

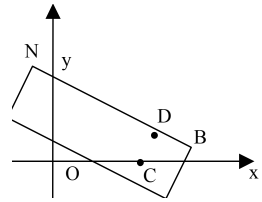
5. $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AD}$.

6. $\overrightarrow{DA}(-1,4) = \overrightarrow{MN} \Rightarrow$ ADMN — параллелограмм; $\overrightarrow{AM}(-3,-3)$,
$\overrightarrow{DN}(-5,5)$; $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DN}) = 0 \Rightarrow AM \perp DN \Rightarrow$ ADMN — ромб.

К-7. *Вариант 2*

1. $\overrightarrow{AC}\,(-1,1)$, $\overrightarrow{BD}\,(-1,0)$.

2. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = (-1 -1, 0 + 1) = (-2,1)$.



3. $\overrightarrow{CA}\,(1,-1)$, $\overrightarrow{DB}\,(1,0)$; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}) = 1$;

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{DB}| = 1$;

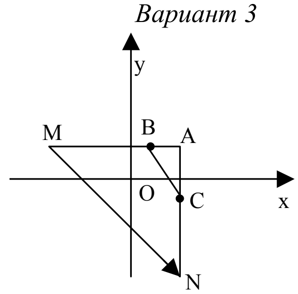
$\cos \widehat{\vec{CA}\ \vec{DB}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\widehat{\vec{CA}\ \vec{DB}} = 45^\circ$.

4. $\overrightarrow{BM} = 6\overrightarrow{BD} = (-6,0)$, $\overrightarrow{AN} = 4 \cdot \overrightarrow{AC} = (-4,4)$;
M(–2,1), N(–1,3).

5. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

6. $\overrightarrow{AB} = (1,2) = \overrightarrow{MN} \Rightarrow$ ABNM — параллелограмм.

К-7. *Вариант 3*



1. $\vec{AC}\,(0,-2)$, $\overrightarrow{AB}\,(-1,0)$.

2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CO} = (-1,2)$.

3. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$,

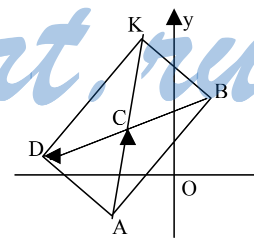
$\widehat{\vec{AB}\ \vec{AC}} = 90^\circ$.

4. $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB} = (-4,0)$, $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC} = (0,-4)$;
M(–2,1), N(2,–3).

5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{MN} = -4\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA}$.

6. $|\overrightarrow{AM}| = 4 = |\overrightarrow{AN}| \Rightarrow \Delta$ AMN — равнобедренный

К-7. *Вариант 4*



1. $\overrightarrow{AC}\,(0{,}5;2{,}5)$, $\overrightarrow{BD}\,(-5,-1)$.

2 $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = (5{,}5;3{,}5)$.

3. $\overrightarrow{AB} = (3,3)$; $\overrightarrow{AD} = (-2,2)$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -6 + 6 = 0$; $\widehat{\vec{AB}\ \vec{AD}} = 90^\circ$.

4. $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC} = (1,5)$, K(–1,4).

5. $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{KC} = 2 \cdot \left(\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right) = 2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$.

6. $\overrightarrow{AD} = (-2,2) = \overrightarrow{BK} \Rightarrow$ ABKD — параллелограмм,

$\widehat{\vec{AB}\ \vec{AD}} = 90^\circ \Rightarrow$ ABKD — прямоугольник.